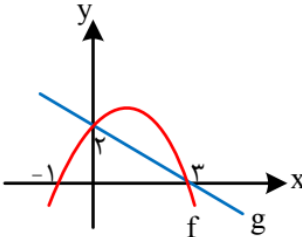
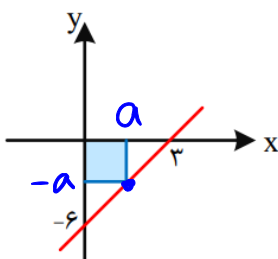
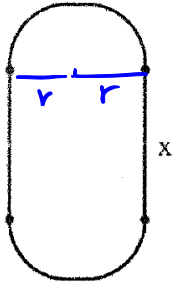


 دبیرستان پسرانه غیردولتی هاتف	سال: دهم	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۲۳
	درس: ریاضی	نام و نام خانوادگی:
	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	آزمون پایان نوبت اول

بارم	پرسش‌ها	ردیف
۱/۵	اگر تابع $f(x) = (ax - 3)(x - 2b) + 2x^2 - 6$ یک تابع همانی باشد، مقدار C را به گونه ای تعیین کنید تا تابع $g(x) = \frac{bx+4}{ax+c}$ یک تابع ثابت باشد. $f(x) = ax^2 - 2abx - 3x + 2b + 2x^2 - 6$ $f(x) = x$ $\rightarrow \boxed{a = -2} \quad \boxed{b = 1}$ $\rightarrow g(x) = \frac{x+4}{-2x+c} = k \rightarrow x+4 = -2kx + kc \rightarrow \begin{cases} -2k = 1 \rightarrow k = -\frac{1}{2} \\ kc = 4 \rightarrow \boxed{c = -8} \end{cases}$	۱
۲	نمودار توابع f, g به صورت مقابل است، مقدار $fog(1)$ را بدست آورید.  $f(x) = a(x-3)(x+1) \xrightarrow{(0,2)} 2 = a(-3)(1) \rightarrow a = -\frac{2}{3}$ $f(x) = -\frac{2}{3}(x-3)(x+1)$ $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{3} \quad g(x) = -\frac{2}{3}x + 1$ $g(1) = \frac{1}{3} \quad f(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}(\frac{1}{3}-3)(\frac{1}{3}+1) = \frac{16}{9}$	۲
۱/۵	در شکل مقابل مساحت مربع را بدست آورید.  $m = \frac{4}{2} = 2$ $y = 2x - 4 \rightarrow -a = 2a - 4$ $\rightarrow 2a = 4 \rightarrow \boxed{a = 2}$ $\rightarrow S = 2 \times 2 = 4$	۳

پنجره ای تشکیل شده از یک مستطیل و دو نیم دایره به شکل زیر موجود است. محیط این پنجره ۱۲۰ واحد می باشد. اگر شعاع نیم دایره ها را r

در نظر بگیریم:



الف) مساحت این پنجره را به صورت تابعی از شعاع نوشته و آن را $S(r)$ بنامید.

$$2x + 2\pi r = 120 \rightarrow 2x = 120 - 2\pi r \rightarrow x = 60 - \pi r$$

$$\rightarrow S(r) = 2rx + \pi r^2 = 2r(60 - \pi r) + \pi r^2 = 120r - \pi r^2$$

ب) در یک پنجره بیشترین نوردهی زمانی اتفاق می افتد که (محیط پنجره/مساحت پنجره) بیشترین باشد. (یک گزینه را انتخاب کنید)

ج) بیشترین نوردهی ممکن برای این پنجره را بدست آورید

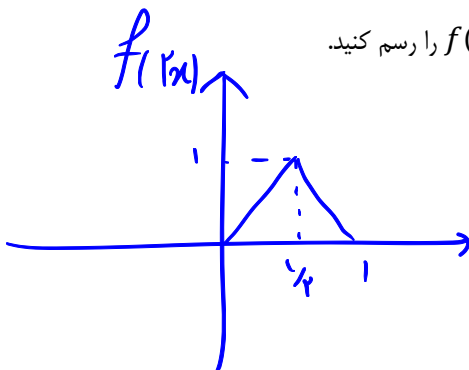
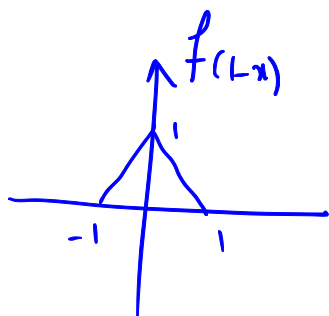
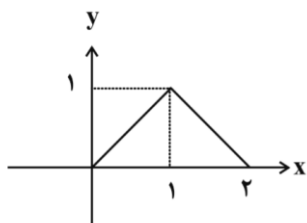
$$S(r) = -\pi r^2 + 120r \rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{120}{2\pi} = \frac{60}{\pi}$$

$$r = \frac{60}{\pi} \rightarrow -\pi \times \frac{3600}{\pi^2} + 120 \times \frac{60}{\pi} = \frac{3600}{\pi}$$



نمودار تابع $f(x)$ به صورت روبرو است:

الف) نمودار تابع $f(2x)$, $f(1-x)$ را رسم کنید.



ب) دامنه و برد توابع $f(x)$, $f(1-x)$, $f(2x)$ را بنویسید.

$$D = [1, 2]$$

$$R = [0, 1]$$

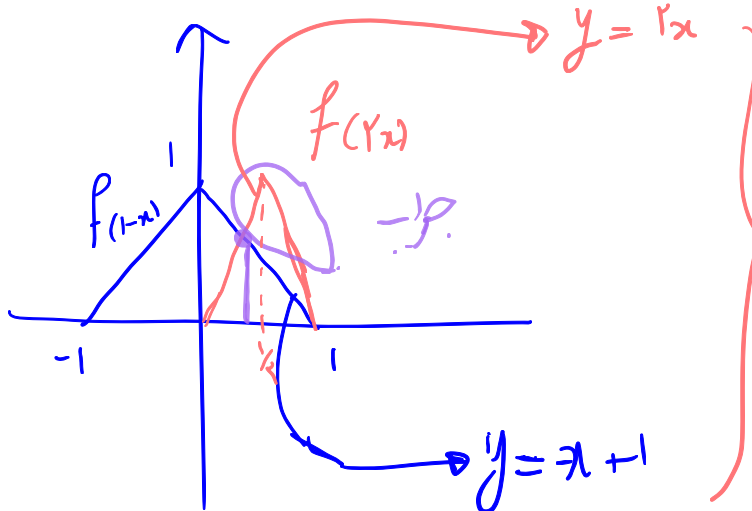
$$D = [-1, 1]$$

$$R = [0, 1]$$

$$D = [0, 1]$$

$$R = [0, 1]$$

ج) با توجه به نمودارهایی که رسم کردید. نامعادله $f(2x) \geq f(1-x)$ را حل کنید.

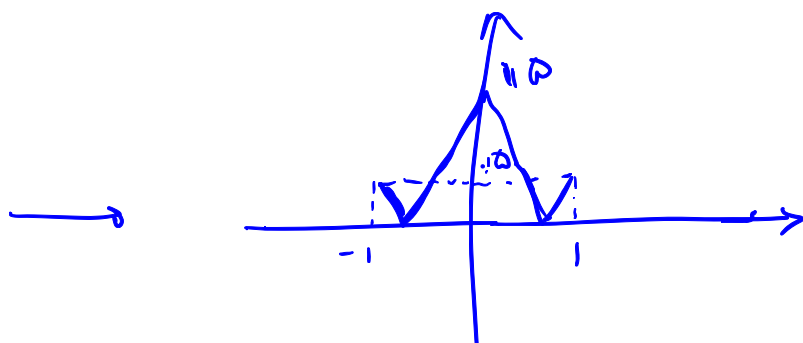
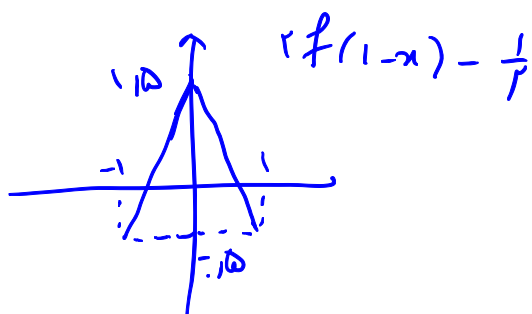
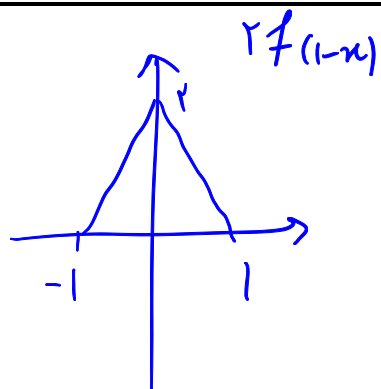


$$-x + 1 = 2x \rightarrow 3x = 1$$

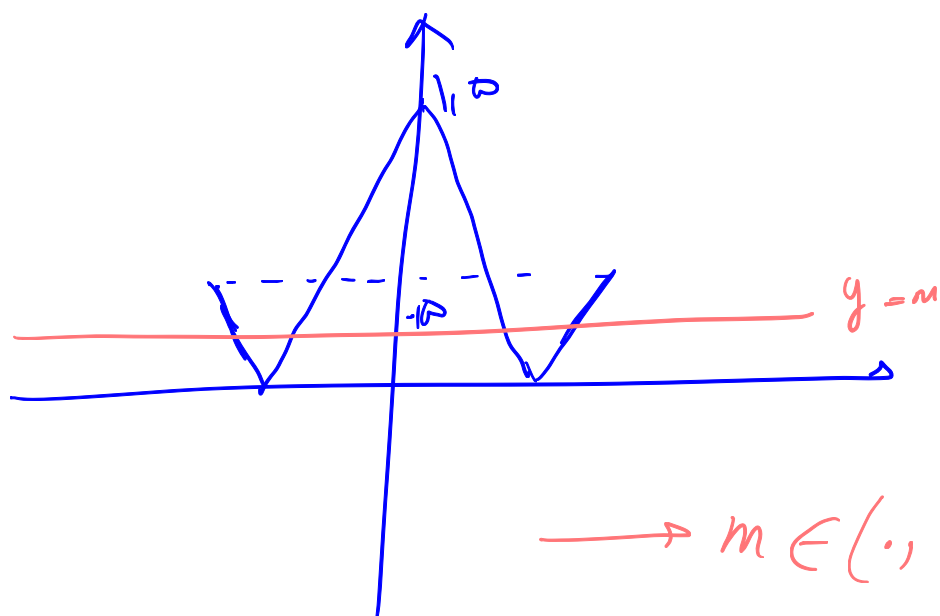
$$\rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

د) نمودار تابع $\left| 2f(1-x) - \frac{1}{4} \right|$ را رسم کنید.



ه) مقدار m را به گونه ای پیدا کنید تا معادله $\left| 2f(1-x) - \frac{1}{4} \right| = m$ ، چهار جواب داشته باشد.



 دبیرستان پسرانه غیردولتی هاتف	سال: دهم	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۲۳
	درس: ریاضی	نام و نام خانوادگی:
	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	آزمون پایان نوبت اول

تابع جز صحیح یا براکت $f(x) = [x]$ به هر عدد بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی آن را نسبت می دهد. مثلاً $f(2/3) = 2$ است. الف) مقادیر $f(1/5), f(\pi), f(-4/2), f(-1/1)$ را بدست آورید.

$$\begin{array}{cccc} & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ 1 & & 3 & & -5 & & -2 \end{array}$$

ب) اگر $3 \leq x < 4$ باشد، برای تابع $f(x)$ چند مقدار داریم؟

$$f(x) = 3 \quad \text{یک مقدار}$$

ج) اگر $-2 \leq x < 0$ باشد، برای تابع $f(x)$ چند مقدار داریم؟

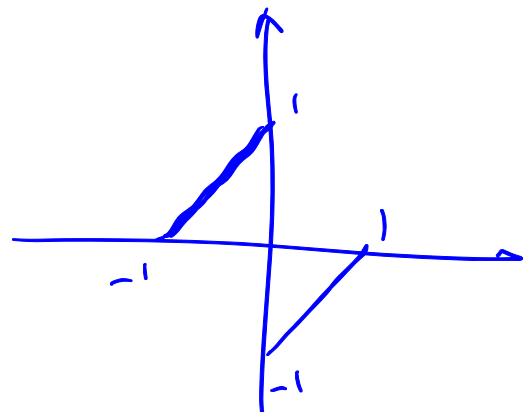
$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ -2 & -2 \leq x < -1 \end{cases} \quad \text{دو مقدار}$$

د) تابع $-1 \leq x < 2$ و $g(x) = x + [x]$ را با توجه به قسمت های قبل بازه بندی کنید و به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید.

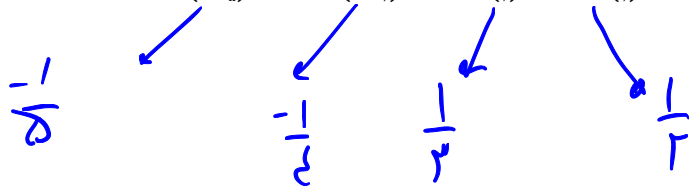
$$g(x) = \begin{cases} x+1 & 1 \leq x < 2 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

د) ابتدا ضابطه تابع $h(x) = \begin{cases} x - [x] & -1 \leq x < 0 \\ x - 1 - [x] & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ را ساده کنید و سپس نمودار آن را رسم کنید.

$$h(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ x-1 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

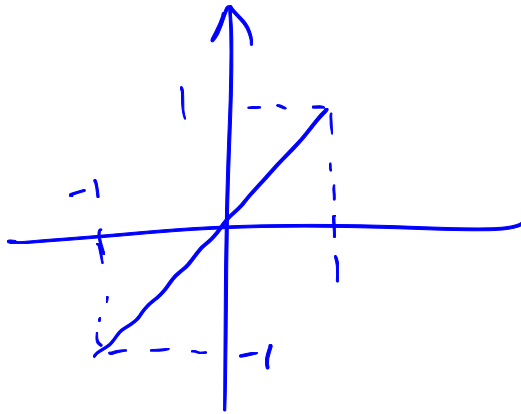


۵) مقدار $hoh\left(\frac{1}{2}\right)$ ، $hoh\left(\frac{1}{3}\right)$ ، $hoh\left(-\frac{1}{4}\right)$ و $hoh\left(-\frac{1}{5}\right)$ را بدست آورید.



۶) ضابطه تابع $hoh(x)$ را بدست آورده و سپس نمودار آن را رسم کنید.

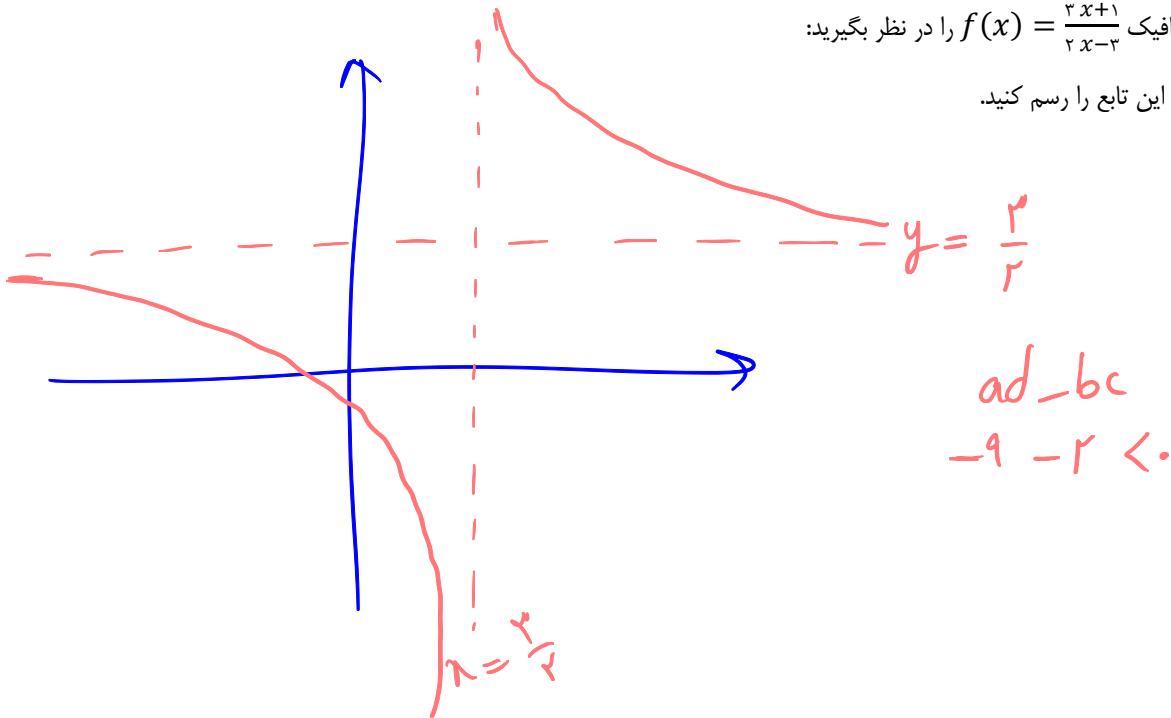
$$hoh(x) = \begin{cases} x & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$





تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{3x+1}{2x-3}$ را در نظر بگیرید:

الف) نمودار این تابع را رسم کنید.



ب) معادله $f \circ f(x) - f(x) = 5$ را حل کنید.

$$f(x) = \frac{3x+1}{2x-3} \quad f(f) = \frac{3f+1}{2f-3} = \frac{3 \times \frac{3x+1}{2x-3} + 1}{2 \times \frac{3x+1}{2x-3} - 3}$$

$$= \frac{9x+3+2x-3}{2x+1-2x+9} = \frac{11x}{10} = x$$

$$f(f(x)) - f(x) = x - \frac{3x+1}{2x-3} = \frac{2x^2-3x-1}{2x-3} = 5$$

$$\rightarrow 2x^2-3x-1 = 10x-15 \rightarrow 2x^2-13x+14=0$$

$$\rightarrow x^2-8x+7=0 \rightarrow (x-1)(x-7)=0 \rightarrow \boxed{x=1, 7}$$

اگر $f(f(x)) = x^2 - x + 1$ باشد.

الف) دو عدد مانند α, β مثال بزنید که $f(f(\alpha)) = f(f(\beta))$ باشد.

$$f(f(0)) = 0 - 0 + 1 = 1$$

$$f(f(1)) = 1 - 1 + 1 = 1$$

ب) $f(f(f(x)))$ را بر حسب $f(x)$ تشکیل دهید.

$$f(f(f(x))) = f^2 - f + 1$$

ج) مقدار عددی $f(0)$ را بدست آورید.

$$f(f(f(0))) = f^2(0) - f(0) + 1 \rightarrow f(0) = f^2(0) - f(0) + 1$$

$$\rightarrow f^2(0) - 2f(0) + 1 = 0 \rightarrow (f(0) - 1)^2 = 0 \rightarrow f(0) = 1$$

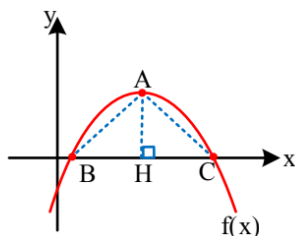
$$f(f(f(1))) = f^2(1) - f(1) + 1 \rightarrow f(1) = f^2(1) - f(1) + 1$$

$$\rightarrow f^2(1) - 2f(1) + 1 = 0 \rightarrow f(1)(f(1) - 1) = 0$$

$$\rightarrow f(1) = 0 \quad f(f(1)) = 1 \quad (\text{ن}) \quad \underline{f(1)=0} \rightarrow f(f(1)) = f(0) = 1 \quad \times$$

$$\rightarrow f(1) = 1 \rightarrow f(f(1)) = 1 \quad (\text{ن}) \quad \underline{f(1)=1} \rightarrow f(f(1)) = f(1) = 1 \quad \checkmark$$

نمودار تابع $f(x) = -x^2 + ax + b$ به صورت زیر است. اگر ارتفاع AH برابر قاعده BC باشد. مساحت مثلث ABC را بدست آورید.



$$AH = \frac{-\Delta}{4(-1)}$$

$$BC = \frac{\sqrt{\Delta}}{1-1} = \sqrt{\Delta}$$

$$AH = BC \rightarrow \frac{\Delta}{4} = \sqrt{\Delta} \rightarrow \Delta = 16$$

$$\rightarrow AH = \frac{\Delta}{4} = 4 \quad BC = \sqrt{\Delta} = 4$$

$$\rightarrow S = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$