



ترکیبیات	○	۷ سؤال
هندسه	○	۷ سؤال
جبر	○	۷ سؤال
نظریه اعداد	○	۴ سؤال

المیاد ریاضی

- در این آزمون پاسخ درست به هر سؤال (تستی یا تشریحی) ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد، اما پاسخ غلط به سوالات تشریحی نمره منفی ندارد.
- استفاده از هرگونه وسیله الکترونیکی از جمله ماشین حساب، تلفن همراه (حتی در حالت خاموش) ممنوع است.
- آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان سال اول صرفاً جنبه‌ی آزمایشی دارد و شرکت‌کنندگان دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه‌ی دوم و سوم انتخاب می‌شوند.

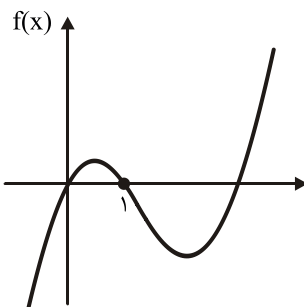
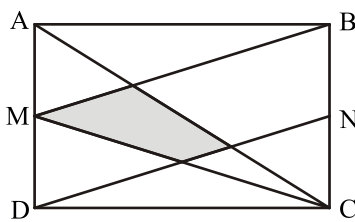
سرپرست تألیف پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	کمیته‌ی علمی باشگاه دانش‌پژوهان جوان
نویسندگان به ترتیب حروف الفبا	کمیته‌ی علمی باشگاه دانش‌پژوهان جوان

محل انجام محاسبات

۱- در کدام گزینه هر سینا می‌خواهد برای دوره کتاب‌های ریاضیات، ادبیات و فیزیک سه سال دبیرستان (۹ کتاب) برنامه‌ریزی کند به نحوی که کتاب‌های هر مبحث به ترتیب پایه آن‌ها مطالعه شود (برای مثال کتاب فیزیک ۱ پیش از کتاب فیزیک ۲ مطالعه شود). او به چند ترتیب مختلف می‌تواند همه کتاب‌ها را مطالعه کند؟

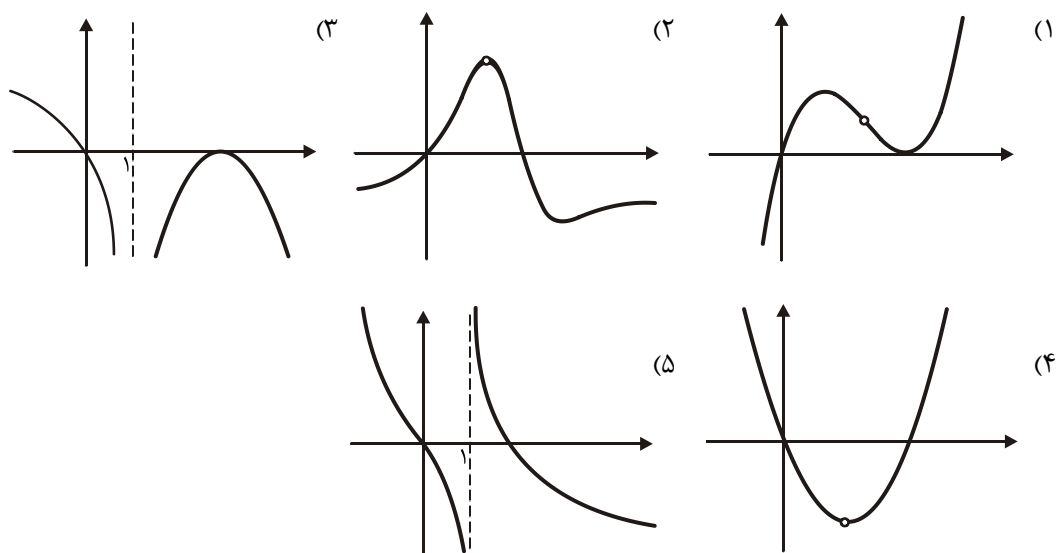
۲- x و y دو عدد حقیقی هستند که $x + y = 6$ و $x^3 + y^3 = 6$ مقدار $x^6 + y^6$ چقدر است؟

۳- در شکل روبه‌رو M و N به ترتیب وسط‌های اضلاع AD و BC از مستطیل $ABCD$ هستند. مساحت مستطیل چه مضربی از چهارضلعی هاشور خورده است؟



۴- فرض کنید نمودار تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به شکل روبه‌رو باشد. در این صورت نمودار تابع $\frac{f(x)}{x-1}$ شبیه کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (نمودار همه گزینه‌ها در نقطه $x=1$ تعریف نشده هستند.)

(گزینه‌ها در صفحه‌ی بعد)



۵- یک عدد طبیعی را کوچولو می‌نامیم، هرگاه دست‌کم سه مقسوم‌علیه مثبت داشته باشد و برابر مجموع کوچک‌ترین سه مقسوم‌علیه مثبتش باشد. چند عدد کوچولو وجود دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۶ (۵) بی‌نهایت

۶- در مثلث ABC نقطه D روی ضلع BC به گونه‌ای قرار گرفته که زاویه‌های BAD ، CAD و ABC با هم برابرند و طول پاره‌خط‌های BD و DC ترتیب برابر ۱ و ۲ است. طول AB چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۵) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

۷- دنباله $a_0, a_1, a_2, \dots$ از اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = 13^{a_n} & n \geq 0. \end{cases}$$

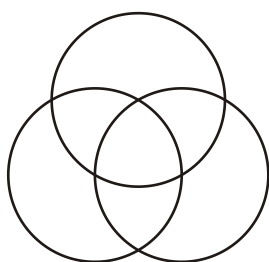
رقم یکان a_{1392} چه عددی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷ (۵) ۹

۸- در مورد اعداد زیر کدام گزینه درست است؟

$$a = 100!, \quad b = 2^{100}, \quad c = 2^{2^{100}}$$

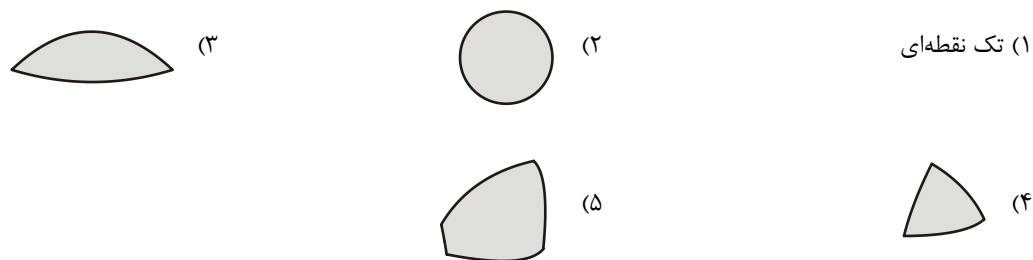
- (۱) $b < a < c$ (۲) $a < b < c$ (۳) $c < a < b$ (۴) $b < c < a$ (۵) $a < c < b$



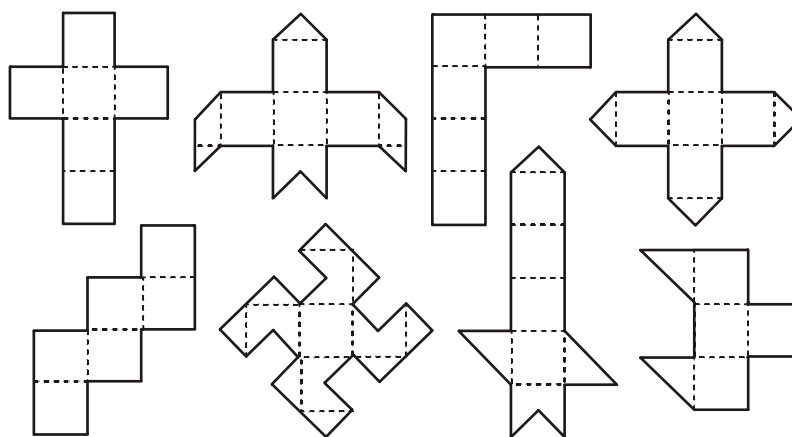
۹- می‌خواهیم با سه رنگ آبی، قرمز و سبز، هفت ناحیه درون شکل روبرو را رنگ‌آمیزی کنیم، به طوری که ناحیه‌های همسایه رنگ‌های متفاوتی داشته باشند (ناحیه‌هایی که فقط در یک منطقه اشتراک دارند همسایه نیستند). این کار به چند طریق ممکن است.

۱۰- وزارت راه و ترابری آزادراهی به طول $524288 = 2^{19}$ متر بین زاهدان و مشهد احداث کرده است و قصد دارد در یک پروژه بلندمدت این آزادراه را مجهز به چراغ‌های روشنایی کند. در هر روز از بین بزرگ‌ترین قطعه‌هایی از آزادراه که هیچ چراغی در آن نیست، نزدیک‌ترین قطعه به زاهدان انتخاب شده و در نقشه وسط آن یک چراغ نصب می‌شود. هزار و یکمین چراغی که نصب می‌شود، چند متر با مشهد فاصله دارد؟

۱۱- چوپانی گوسفند گرسنه خود را در چراگاهی سرسبز با سه طناب مختلف به سه درخت بسته است. گوسفند علف‌های همه قسمت‌هایی از چراگاه که به آن دسترسی دارد را می‌خورد. ناحیه‌ای از چراگاه که گوسفند علف‌های آن را خورده است، کدام شکل نمی‌تواند باشد؟



۱۲- با تا کردن چند تا از شکل‌های زیر از روی خط‌چین می‌توان یک مکعب ساخت؟



۱۳- کوچک‌ترین عدد طبیعی که دارای ۱۳۹۲ مقسوم‌علیه مثبت است، چند عامل دارد؟

۱۴- در وب‌گاه المپیاد ریاضی ایران (www.mathysc.ir) کیفیت آزمون مرحله اول سال گذشته به نظرسنجی گذاشته شده است. گزینه‌های نظرسنجی عبارت‌اند از «خیلی خوب بود»، «عالی بود» و «به‌تر از این نمی‌شد». پیش از این که عباس نظر خود را ثبت کند، درصد گزینه‌ها به ترتیب دقیقاً برابر ۲۵، ۵۰ و ۲۵ بوده است و پس از آن این نسبت‌ها به ۲۴، ۴۸ و ۲۸ تبدیل می‌شود، به غیر از عباس چند نفر در نظرسنجی شرکت کرده‌اند؟

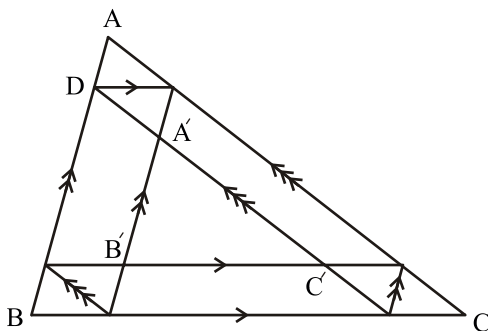
۱۵- چند زوج مرتب (p, q) از اعداد اول وجود دارد که برای آن‌ها داشته باشیم $p^2 - pq + q^2 = 37^2$.

۱۶- «ضربین حساب» ماشینی است که از یک صفحه نمایش‌گر با قابلیت نمایش اعداد خیلی بزرگ و دکمه‌هایی با شماره‌های ۱ الی ۹ تشکیل شده است. با فشار دادن هر دکمه، ضربین حساب بلافاصله عدد صفحه نمایش‌گر را در عدد مربوط به آن دکمه ضرب می‌کند و حاصل را به جای عدد قبلی در صفحه نمایش می‌دهد. اگر ابتدا عدد ۱ روی صفحه نمایش‌گر نوشته شده باشد، برای به دست آوردن عدد $5^{1392} \times 31435 \times 2^{1014}$ دست کم چند بار باید از دکمه‌های ضربین حساب استفاده کرد؟ (برای مثال می‌توان با سه بار استفاده از دکمه‌های ضربین حساب به ۷۲۹ دست یافت، زیرا $729 = 9 \times 9 \times 9$)



۱۷- در یک پادگان ۱۱۹۶ سرباز در ۱۳ ردیف ۹۲ تایی به شکل منظم ایستاده‌اند. آخرین سرباز از ردیف آخر یک سرباز را می‌بیند اگر روی خط واصل بین آن‌ها، سرباز دیگری نباشد. او چند سرباز از ردیف اول را می‌بیند؟ (سربازها را نقطه فرض می‌کنیم).

۱۸- مطابق شکل روبه‌رو خطوطی موازی اضلاع مثلث ABC رسم کرده‌ایم تا مثلث A'B'C' ایجاد شود، به گونه‌ای که محیطش نصف محیط ABC باشد. طول AB چند برابر طول AD است؟

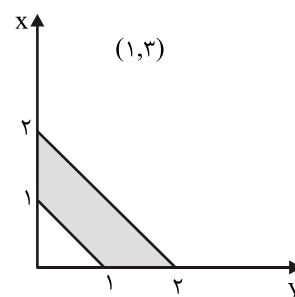
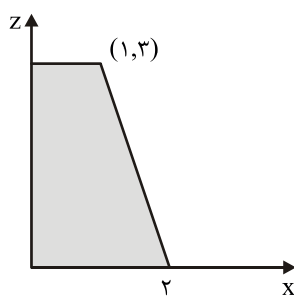
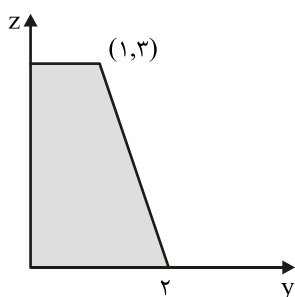


۱۹- مجموعه S را مجموعه همه اعداد حقیقی مثل A می‌گیریم که برای آن‌ها اعداد حقیقی x و y موجود باشند، به گونه‌ای که

$$a(a-1) + x(x-1) + y(y-1) = \frac{3}{2}$$

می‌دانیم که S یک بازه است. طول این بازه چه قدر است؟

۲۰- تصویر عمود یک چهارضلعی مسطح در فضا روی سه صفحه مختصات به شکل‌های زیر است: مجموع مربع‌های طول قطرهای این چهارضلعی چه قدر است؟



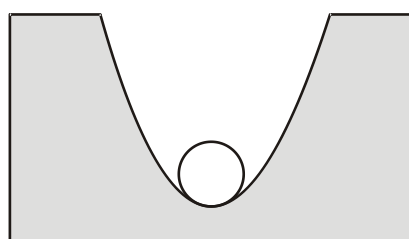
۲۱- چند چهارتایی مرتب (x, y, z, t) از اعداد حقیقی یافت می‌شود که در معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} xy + yz + zx = t^2 \\ yz + zt + ty = x^2 \\ zt + tx + xz = y^2 \\ tx + xy + yt = z^2 \end{cases}$$

۲۲- تنها دزد شکرستان از دو سال پیش تحت تعقیب نظمیه شکرستان قرار دارد. طبق تحقیقات نظمیه، تعداد سفرهای او بین شکرستان و ۴ نمکستان شرقی، غربی، شمالی، و جنوبی به صورت زیر بوده است (برای مثال این دزد سه سفر از نمکستان شرقی به شکرستان داشته است). اکنون او در کدام شهر مخفی شده است؟

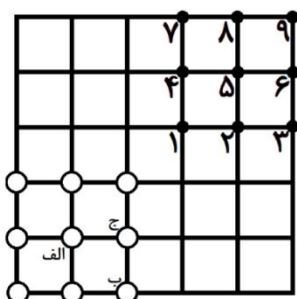
از	ن. جنوبی	ن. شمالی	ن. غربی	ن. شرقی	شکرستان	به
شکرستان	۲	۰	۱	۳	×	شکرستان
نمکستان شرقی	۱	۰	۲	×	۰	ن. شرقی
نمکستان غربی	۰	۳	×	۰	۱	ن. غربی
نمکستان شمالی	۱	×	۱	۰	۲	ن. شمالی
نمکستان جنوبی	×	۲	۰	۰	۲	ن. جنوبی

۲۳- طول اضلاع AB ، AC و BC از مثلث ABC به ترتیب $۴\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۷}$ است. خطی که از وسطهای AB و AC را به هم وصل می‌کند با خطی که از B موازی با نیم‌ساز A رسم می‌شود در نقطه D برخورد می‌کند. طول AD چقدر است؟



۲۴- وزارت نفت کانالی بین بوشهر و ایلام حفر کرده است و قصد دارد لوله انتقال گازی که در آن قرار دارد. سطح مقطع لوله دایره و سطح مقطع کانال به شکل قسمتی از یک سهمی است (سهمی نمودار یک چند جمله‌ای درجه دوم است). اگر عرض و عمق کانال برابر ۱ متر باشد، قطر بزرگ‌تری لوله‌ای که می‌توان در کانال قرار داد به طوری که با پایین‌ترین نقطه کانال تماس داشته باشد، چند سانتی‌متر است؟

۲۵- پهلوان پوریای ولی از یاور خواسته که ۹ میل زورخانه را از نقاطی که با دایره توخالی نمایش داده شده به نقاطی که با دایره توپر نمایش داده شده ببرد، به نحوی که مجموع فواصل ۹ جفت نقطه ابتدایی و انتهایی، بیش‌ترین مقدار ممکن شود. (دقت کنید که در هر نقطه یک میل قرار می‌گیرد). در این صورت میل‌های الف و ب و ج به ترتیب باید به کدام نقاط منتقل شوند؟



(۱) ۲، ۳، ۵

(۲) ۸، ۷، ۵

(۳) ۸، ۷، ۹

(۴) نمی‌توان تعیین کرد.

(۵) نمی‌توان تعیین کرد.