



۷ سؤال

ترکیبیات

۷ سؤال

هندسه

۷ سؤال

جبر

۴ سؤال

نظریه اعداد

IRanian Young Scholars Club

پاسخنامه المپیاد ریاضی

سرپرست تألیف پاسخنامه‌ی تشریحی	کمیته‌ی علمی باشگاه دانش‌پژوهان جوان
نویسندگان به ترتیب حروف الفبا	کمیته‌ی علمی باشگاه دانش‌پژوهان جوان

۱- پاسخ ۱۶۸۰ است.

هر روش مطالعه معادل است با یک نحوه‌ی قرار دادن سه کلمه‌ی ریاضی، سه کلمه فیزیک و سه کلمه‌ی ادبیات در یک ردیف ۹ تایی. بدین منظور، برای انتخاب مکان سه کلمه‌ی ریاضی، $\binom{9}{3}$ حالت مختلف داریم. سپس از بین ۶ جایگاه باقی‌مانده، برای انتخاب مکان سه کلمه ادبیات، $\binom{6}{3}$ حالت مختلف داریم و بعد از آن، مکان کلمات فیزیک به طور یکتا مشخص می‌شود. پس جواب مسأله برابر است با:

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} = \frac{9!}{6!3!} \times \frac{6!}{3!3!} = \frac{9!}{3!3!3!} = 1680$$

۲- پاسخ ۶۳۵۲۰ است.

جواب راه حل اول: ابتدا می‌توان xy را محاسبه کرد.

$$36 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 40 + 2xy \Rightarrow xy = -2$$

حال با استفاده از اتحاد مجموع مکعبها داریم:

$$x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 + y^4 - x^2y^2) = 40(x^4 + y^4 - 4)$$

می‌توان مقدار $x^4 + y^4$ را هم به سادگی محاسبه کرد.

$$1600 = 40^2 = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = x^4 + y^4 + 8 \Rightarrow x^4 + y^4 = 1592$$

پس در نهایت داریم:

$$x^6 + y^6 = 40(1592 - 4) = 40 \times 1588 = 63520$$

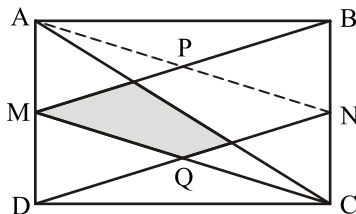
راه حل دوم: طبق قسمت اول راه‌حل بالا می‌دانیم که حاصل ضرب x و y برابر ۲- است. بنابراین با توجه به این که مجموع آن‌ها هم برابر ۶ است، x

و y دو ریشه چندجمله‌ای $z^2 - 6z - 2$ هستند. بنابراین

$$\{x, y\} = \left\{ 3 + \sqrt{9+2}, 3 - \sqrt{9+2} \right\} = \left\{ 3 + \sqrt{11}, 3 - \sqrt{11} \right\}$$

حال با به دست آمدن مقدار x و y ، می‌توان $x^6 + y^6$ را با بسط دادن $(3 \pm \sqrt{11})^6$ به دست آورد.

راه حل اول: مطابق شکل زیر اگر با پاره‌خطی نقطه‌ای A را به N وصل کنیم، با توجه به این که $AN \parallel MC$ و $MB \parallel DN$ ، چهارضلعی $PNQM$ یک متوازی‌الاضلاع است. مرکز این چهارضلعی وسط قطرهای آن یعنی وسط MN است که همان محل برخورد قطرهای مستطیل است. دقت کنید که خط AC از مرکز این متوازی‌الاضلاع عبور می‌کند و بنابراین مساحت آن را نصف می‌کند.



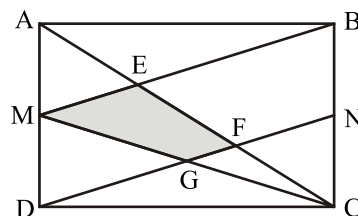
پس مساحت چهارضلعی هاشور خورده، نصف مساحت چهارضلعی $MPNQ$ است که برابر مساحت مثلث MQN است. برای به دست آوردن مساحت این مثلث دقت کنید که ارتفاع نظیر Q ، $\frac{1}{4}$ ضلع AD و قاعده‌ی آن یعنی MN برابر طول ضلع AB است. پس در کل مساحت مستطیل ۸ برابر مساحت مثلث MNQ و بنابراین ۸ برابر مساحت چهارضلعی هاشور خورده است.

راه حل دوم: مطابق شکل زیر این بار سه رأس دیگر چهارضلعی هاشور خورده را E ، F و G می‌نامیم. هم‌چنین مساحت مستطیل را با S نمایش می‌دهیم.

$$\text{مساحت } AMC = \frac{1}{2} AM \cdot CD = \frac{1}{2} \times \frac{AD}{2} \times DC = \frac{1}{4} S$$

دقت کنید که دو مثلث AEM و CEB متشابه هستند. پس نسبت ارتفاع‌های این دو مثلث برابر نسبت

$$\frac{AM}{BC} \text{ است که برابر } \frac{1}{2} \text{ است. از طرفی می‌دانیم مجموع طول ارتفاع‌های این دو مثلث برابر طول ضلع}$$



AB است. پس طول ارتفاع AEM برابر $\frac{1}{3} AB$ است و در نتیجه:

$$\text{مساحت } AME = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times AM = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} AB \times \frac{1}{2} AD = \frac{1}{12} S$$

پس مساحت مثلث EMC که تفاضل مساحت مثلث‌های AMC و AME است، برابر $\frac{1}{12} S - \frac{1}{4} S = \frac{1}{6} S$ است.

در نهایت توجه کنید که چون مثلث‌های CEM و CFG متشابه هستند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر $\frac{1}{4}$ است. پس:

$$\text{مساحت } MEFG = \frac{3}{4} \times \text{مساحت } MEC = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} S = \frac{1}{8} S$$

۴- پاسخ ۴ است.

از آنجا که برای اعداد کمتر از صفر $f(x)$ و $x-1$ هر دو منفی هستند، حاصل تقسیم آن‌ها عددی مثبت خواهد شد. بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ نمی‌توانند نمودار تابع $\frac{f(x)}{x-1}$ باشند. فرض کنید f به جز نقاط صفر و یک، در نقطه c صفر شده است. برای اعداد بیشتر از c ، $f(x)$ و $x-1$ هر دو مثبت هستند. بنابراین در این محدوده نیز حاصل تقسیم آن‌ها مثبت است. به این ترتیب گزینه‌های ۳ و ۵ نیز نمی‌توانند جواب مسأله باشند.

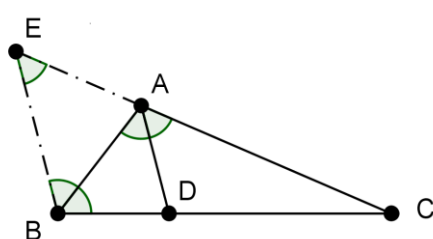
بنابراین جواب تنها می‌تواند گزینه ۴ باشد. اگر $f(x) = x(x-1)(x-2)$ ، آنگاه $\frac{f(x)}{x-1} = x(x-2)$ نموداری شبیه گزینه ۴ دارد.

۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

کوچک‌ترین مقسوم‌علیه مثبت هر عددی یک است و دومین مقسوم‌علیه کوچک عدد اولی مثل p است. سومین مقسوم‌علیه هم عدد اول دیگری مثل q یا p^2 است. اگر n عددی کوچولو باشد، مقسوم‌علیه سوم آن نمی‌تواند p^2 باشد، چون در این صورت $n = 1 + p + p^2$ که در این صورت n نمی‌تواند بر p بخش‌پذیر باشد.

پس $n = 1 + p + q$ که $p < q$ دو مقسوم‌علیه اول کوچک n هستند. چون $p \mid n$ و $q \mid n$ ، نتیجه می‌شود، $p \mid 1 + p$ و $q \mid 1 + p$. پس $q \leq 1 + p$ ، از طرف دیگر $p < q$. بنابراین $q = p + 1$ و در نتیجه p و q دو عدد اول متوالی هستند. این یعنی $p = 2$ و $q = 3$. در این صورت n برابر ۶ می‌شود که خاصیت مورد نظر را دارد. پس تنها همین یک عدد کوچولو را داریم و پاسخ گزینه‌ی ۲ است.

۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



طول AB را x می‌نامیم. از نقطه‌ی B خطی به موازات AD رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AC را در E قطع کند.

با توجه به موازی بودن BE و AD داریم:

$$BEA = CAD, \quad EBA = BAD$$

بنابراین، $EBA = BEA$ و در نتیجه مثلث ABE متساوی‌الساقین است، یعنی $EA = BA = x$.

از طرف دیگر، بنابر قضیه تالس برای دو خط موازی BE و AD ،

$$\frac{CA}{AE} = \frac{CD}{BD} = \frac{2}{1}$$

بنابراین $CA = 2AE = 2x$ و نیز، $CE = 3x$.

از طرف دیگر، توجه کنید که $CBE = CAB$ ، پس دو مثلث CBE و CAB با همین ترتیب رئوس با یکدیگر متشابه‌اند. بنابراین:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{EC}$$

که با توجه به روابط قبلی به دست می‌آید:

$$\frac{2x}{3} = \frac{3}{3x}$$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{که از آن به دست می‌آید} \quad x^2 = \frac{3}{2} \quad \text{و در نتیجه}$$

۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

برای تعیین رقم یکان a_{1392} کافی است باقی‌مانده تقسیم آن به 10 را مشخص کنیم.

برای این منظور دقت کنید برای هر عدد طبیعی n : $1^{a_n} \equiv 13^{a_n} \equiv 1^{a_{n+1}} \equiv 10$ (به پیمانه‌ی ۴)

یعنی هر a_n به شکل $4b_n + 1$ است که b_n خود یک عدد صحیح است. حال داریم:

$$a_{1392} \equiv 13^{a_{1391}} \equiv 3^{4b_{1391}+1} \equiv (3^4)^{b_{1391}} \times 3 \equiv (81)^{b_{1391}} \times 3 \equiv 3 \quad \text{(به پیمانه‌ی 10)}$$

۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

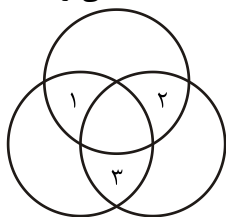
$$b = 2^{100} = \overbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}^{100} = \overbrace{2 \times \dots \times 2}^{98} \times 2 \times 2 < (2 \times 3 \times \dots \times 99) \times 100 = 100! = a$$

$$a = 1 \times 2 \times \dots \times 100 < 100^{100} < 128^{100} = 2^{700} < 2^{31} < 2^{2^{31}} = c$$

پس $b < a < c$

۹- پاسخ ۸۴ است.

فرض می‌کنیم ناحیه‌های مشخص شده با اعداد ۱، ۲، ۳ در شکل زیر به ترتیب دارای رنگ‌های X, Y, Z باشند. توجه کنید که تمامی رنگ‌های X, Y, Z نمی‌توانند متمایز باشند زیرا در غیراین صورت ناحیه‌ی مرکزی را با هیچ رنگی نمی‌توان رنگ کرد.



اکنون دو حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: X, Y, Z هم‌رنگ باشند. در این حالت رنگ مشترک را می‌توان به ۳ حالت انتخاب کرد. همچنین هر یک

از دیگر نواحی را می‌توان به دو صورت رنگ‌آمیزی کرد. پس در این حالت تعداد رنگ‌آمیزی‌ها برابر $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ است.

حالت دوم: در میان X, Y, Z از یک رنگ دو بار و از یک رنگ یک بار استفاده شده باشد. برای انتخاب ناحیه‌ی با رنگ متمایز ۳، برای انتخاب

رنگ این ناحیه ۳ و برای انتخاب رنگ دیگر ۲ انتخاب داریم. پس برای مشخص نمودن رنگ ناحیه‌ی ۱، ۲، ۳ در این حالت $3 \times 3 \times 2 = 18$

روش متمایز داریم. حال توجه کنید که رنگ ناحیه‌ی مرکزی به صورت یکتا مشخص می‌شود چرا که دو رنگ متمایز، همسایه دارد. همچنین دو تا

از نواحی گوشه‌ای نیز با هر دو رنگ مجاور هستند و رنگ این نواحی نیز به صورت یکتا مشخص می‌گردد. تنها ناحیه‌ی نامشخص ناحیه‌ی گوشه‌ای

است که با دو ناحیه‌ی هم‌رنگ مجاور است و در نتیجه می‌توان آن را به دو شیوه رنگ‌آمیزی کرد. پس در این حالت طبق اصل ضرب تعداد

شیوه‌های رنگ‌آمیزی برابر $18 \times 2 = 36$ است.

پس طبق اصل جمع تعداد راه‌های رنگ‌آمیزی شکل برابر $48 + 36 = 84$ است.

۱۰- پاسخ ۲۳۰۴۰ است.

اولین چراغ در وسط آزادراه احداث می‌شود. چراغ‌های دوم و سوم به ترتیب در $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ مسیر زاهدان به مشهد احداث می‌شوند. به همین شکل

چراغ‌های چهارم تا هفتم بیت آن‌ها و در حالت کلی برای عدد طبیعی n چراغ‌های 2^n ام تا $2^{n+1}-1$ ام در میانه راه‌های بیم چراغ‌های فعلی قرار

خواهند گرفت. می‌دانیم که ۱۰۰۱ بین $2^9 = 512$ و $2^{10} = 1024$ است و فاصله بین چراغ‌های متوالی تا قبل از نصب چراغ ۵۱۲ برابر

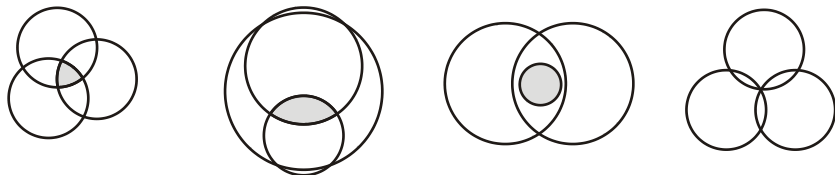
$$\frac{2^{19}}{2^9} = 1024 \text{ متر است. در نتیجه فاصله مشهد تا چراغ } 1001 \text{ ام برابر } 23040 = 512 + 1024 \times (1001 - 512) \text{ است.}$$

۱۱- گزینه‌ی ۵ پاسخ صحیح است.

به مرکز هر درخت، دایره‌ای به شعاع طول طنابی که به آن وصل است رسم می‌کنیم. ناحیه‌ای که گوسفند علف‌های آن را می‌خورد دقیقاً اشتراک

ناحیه درونی این سه دایره است. بنابراین باید تعیین کنیم که اشتراک ناحیه‌ی داخل سه دایره، کدام شکل نمی‌تواند باشد. گزینه‌های ۱ تا ۴

می‌توانند باشند، مانند شکل‌های مقابل:



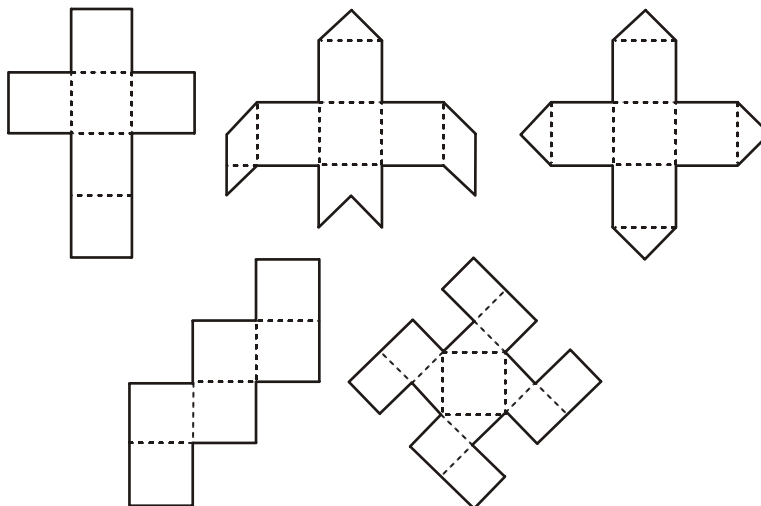
اما گزینه‌ی ۵ نمی‌تواند ناحیه اشتراک سه دایره باشد.

زیرا مرز آن از ۴ کمان تشکیل شده در حالی که ما تنها

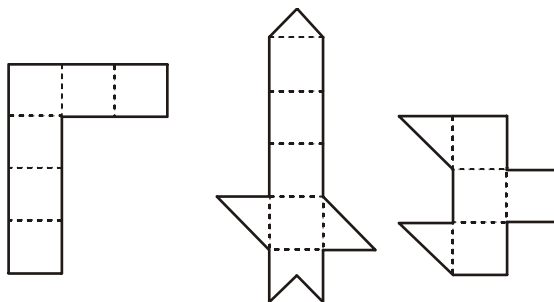
سه دایره داریم پس باید دو تا از کمان‌ها متعلق به یک دایره باشند اما با توجه به شکل، هیچ دوتایی متعلق به یک دایره نیستند. پس گزینه‌ی ۵ صحیح است.

۱۲- پاسخ ۵ است.

با اندکی تجسم فضایی می‌توان دید که شکل‌های زیر می‌توانند باز شده‌ی یک مکعب باشند.



اما با شکل‌های زیر نمی‌توان یک مکعب ساخت. شکل سمت چپ هفت مربع و شکل سمت راست پنج مربع دارد. در شکل وسط نیز مسیری موازی اضلاع به طول پنج وجود دارد.



۱۳- پاسخ ۶ است.

می‌دانیم $1392 = 2^4 \times 3 \times 17$ حالت‌های مختلف برای عددی با ۱۳۹۲ مقسوم‌علیه مثبت فقط چهار حالت زیر است که در آن‌ها همه p_i ها اعدادی اول هستند.

$$\text{حالت اول: } p_1^{28} \times p_2^{15} \times p_3^2$$

$$\text{حالت دوم: } p_1^{28} \times p_2^7 \times p_3^2 \times p_4^1$$

$$\text{حالت سوم: } p_1^{28} \times p_2^2 \times p_3^2 \times p_4^2$$

$$\text{حالت چهارم: } p_1^{28} \times p_2^2 \times p_3^1 \times p_4^1 \times p_5^1 \times p_6^1$$

در هر کدام از حالت‌های بالا برای کوچک‌تر شدن عدد باید از عددهای اول کوچک به ترتیب استفاده کنیم پس کافی است عددهای زیر را با هم مقایسه کنیم و کوچک‌ترین آن‌ها را بیابیم.

$$\begin{aligned} a_1 &= 2^{28} \times 3^{15} \times 5^2 & ; & & a_2 &= 2^{28} \times 3^7 \times 5^2 \times 7^1 \\ a_3 &= 2^{28} \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 & ; & & a_4 &= 2^{28} \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 \times 11^1 \times 13^1 \end{aligned}$$

حال با انجام محاسبات جواب را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3^8}{7} \Rightarrow a_1 > a_2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{11 \times 13}{3 \times 5^2 \times 7} \Rightarrow a_3 > a_4$$

$$\frac{a_2}{a_4} = \frac{3^5 \times 5}{11 \times 13} \Rightarrow a_2 > a_4$$

پس جواب سوال a_4 است که دارای ۶ عامل اول است.

۱۴- پاسخ ۲۴ است.

فرض کنید پیش از عباس n نفر در نظرسنجی شرکت کرده باشند. از آنجایی که یکی از گزینه‌ها دقیقاً ۲۵ درصد از آرا را به دست آورده است، پس n باید بر ۴ بخش پذیر باشد. فرض کنید $n = 4k$. پس از رأی عباس گزینه‌ی آخر («بهتر از این نمی‌شد.») افزایش یافته است پس عباس به این گزینه رأی داده است. با توجه به صورت سوال پیش از این که عباس نظر خود را ثبت کند، k نفر به گزینه‌ی آخر رأی دادند. پس بعد از رأی عباس $k+1$ نفر و در نتیجه $\frac{k+1}{4k+1} \times 100$ درصد از افراد این گزینه را انتخاب کرده‌اند. با توجه به صورت سوال این مقدار برابر ۲۸ بوده و در نتیجه

$$\text{داریم: } k = 6 \Rightarrow 12k = 71 \Rightarrow 112k + 28 = 100k + 100 \Rightarrow 100k + 100 = 28 \Rightarrow \frac{k+1}{4k+1} \times 100 = 28 \text{ پس } \frac{k+1}{4k+1} \times 100 = 28 \Rightarrow n = 4k = 24 \text{ پاسخ سوال است.}$$

۱۵- پاسخ ۱ است.

به دلیل تقارن مسئله نسبت به p و q می‌توان فرض کرد $q \leq p$. حال داریم:

$$p(p-q) = (37-q)(37+q)$$

با توجه به این که سمت چپ نامنفی است، باید سمت راست هم نامنفی باشد و در نتیجه $q \leq 37$. توجه کنید که چون $(37-q)(37+q)$ بر p بخش پذیر است، $p \mid 37-q$ و $p \mid 37+q$. اگر $p \mid 37-q$ ، نتیجه می‌شود که $p < 37$ و در نتیجه $p(p-q) < 37(37-q) < (37+q)(37-q)$. پس این حالت ممکن نیست و تنها حالت $p \mid 37+q$ باقی می‌ماند. دقت کنید که اگر $p \mid 37+q$ باشد، زوجیت p و q متفاوت است، و چون $p > q$ است، $q = 2$ و $p = 39$ است. اما ۳۹ اول نیست. در نتیجه داریم

$$p \leq \frac{37+q}{2} \leq 37$$

چون نابرابری به تساوی تبدیل شده است، باید $p = 37$ و $q = p$ باشد. ضمناً اگر $p = q = 37$ باشد، این معادله برقرار است. بنابراین با توجه به اول بودن ۳۷، $(37, 37)$ تنها جواب این معادله در اعداد اول است.

۱۶- پاسخ ۲۷۸۱ است.

عدد مورد نظر در صورت مسأله را A بنامید. ابتدا نشان می‌دهیم که با ۲۷۸۱ بار استفاده از دکمه‌ها می‌توان عدد A را نمایش داد:

۱۳۹۲ بار دکمه‌ی ۵ را فشار می‌دهیم، سپس $\frac{2013}{3}$ بار دکمه ۸ را فشار می‌دهیم، سپس $\frac{1434}{4}$ بار دکمه ۹ را فشار می‌دهیم و در نهایت یک بار دکمه ۶ را فشار می‌دهیم. عددی که به دست می‌آید برابر است با:

$$5^{1392} \times 8^{\frac{2013}{3}} \times 9^{\frac{1434}{4}} \times 6$$

که برابر با A است. به این ترتیب در مجموع $1 + \frac{1434}{2} + \frac{2013}{3} + 1392$ بار از دکمه‌های ضربین حساب استفاده کرده‌ایم.

اکنون نشان می‌دهیم با کمتر از این تعداد نمی‌توان این کار را انجام داد. یک روش استفاده از دکمه‌ها را بهینه می‌نامیم اگر با کم‌ترین تعداد استفاده از دکمه‌ها به عدد A برسیم. توجه کنید که ما ناگزیر هستیم که 1392 بار از دکمه 5 استفاده کنیم. زیرا در بین ارقام 1 تا 9 ، تنها عددی که عامل 5 دارد، رقم 5 است و ما باید 1392 عامل 5 را ایجاد کنیم پس باید 1392 بار از رقم 5 استفاده کنیم.

ادعا می‌کنیم روش بهینه‌ای وجود دارد که در آن حداکثر یک بار از رقم 6 استفاده شده است، زیرا به جای هر دو بار استفاده از رقم 6 می‌توانیم یک‌بار 4 و یک‌بار 9 را استفاده کنیم. به این ترتیب می‌توانیم 6 ها را دو تا دو تا با 4 و 9 جایگزین کنیم تا در نهایت حداکثر یک 6 باقی بماند. از طرف دیگر روشن است که در روش بهینه، ما حداکثر یک بار از 3 استفاده کرده‌ایم چون اگر بیش از یک بار از 3 استفاده کرده باشیم، می‌توانیم به جای دو تا 3 ، یک بار از 9 استفاده کنیم و به این ترتیب تعداد دکمه‌های استفاده شده را کاهش دهیم که این با بهینه بودن روش مورد نظر تناقض دارد. بنابراین حداکثر یک بار از 3 استفاده کرده‌ایم. مشابهاً می‌توان نتیجه گرفت که حداکثر یک بار از 2 استفاده کرده‌ایم چون به جای دو بار استفاده از 2 می‌توان نتیجه گرفت که حداکثر یک‌بار از 2 استفاده کرده‌ایم چون به جای دو بار استفاده از 4 می‌توان یک بار از 2 استفاده کرد. همچنین روش بهینه‌ای وجود دارد که در آن حداکثر یک‌بار از 4 استفاده شده است. زیرا به جای هر دو بار استفاده از 4 می‌توان یک بار از 2 و یک بار از 8 استفاده کرد. همچنین روشن است که امکان ندارد هم از 2 و هم از 4 استفاده کرده باشیم زیرا به جای آن‌ها می‌توان یک بار از 8 استفاده کرد.

حال دقت کنید که عوامل 2 از یکی از اعداد 8 یا 6 یا 4 یا 2 می‌آیند. اگر تعداد استفاده از این ارقام به ترتیب a_8, a_6, a_4, a_2 باشند، داریم:

$$2014 = 3a_8 + 2a_6 + a_2$$

زیرا در نهایت باید 2014 عامل 2 به دست بیاوریم.

با توجه به اینکه باقی‌مانده 2014 بر 3 ، 1 است و $3a_8$ بر 3 بخش‌پذیر است، پس باید باقی‌مانده $a_6 + a_2$ نیز بر 3 برابر 1 باشد، اما با توجه به توضیحات بالا، a_8, a_6, a_2 هر کدام صفر یا یک هستند و a_4 هر دو نمی‌توانند یک باشند، با بررسی همه حالت‌ها، به راحتی می‌توان دید که تنها حالات ممکن عبارتند از:

$$a_2 = 1, a_4 = a_6 = 0$$

$$a_6 = 1, a_2 = a_4 = 0$$

اگر حالت اول رخ دهد، از رقم 6 استفاده نکرده‌ایم و از طرف دیگر چون از رقم 2 استفاده کرده‌ایم با توجه به توضیحات قبل از رقم 3 استفاده نکرده‌ایم بنابراین تنها رقمی که عامل 3 دارد رقم 9 است ولی این غیر ممکن است زیرا هر 9 ، دو عامل 3 دارد و حال آنکه در مجموعه به 1435 عامل 3 نیاز داریم که عددی فرد است.

پس حالت اول غیرممکن است و حالت دوم رخ می‌دهد. پس یک بار از 6 استفاده کرده‌ایم و یک عامل 2 به دست آورده‌ایم و سایر عوامل 2 را باید

از 8 به دست بیاوریم. پس باید $\frac{2013}{3}$ بار از 8 استفاده کنیم.

حال چون یک بار از 6 استفاده کرده‌ایم پس یک عامل 3 به دست آورده‌ایم و 1434 عامل 3 باقی می‌ماند که چون 1434 بر 2 بخش‌پذیر است

می‌توانیم همه آن‌ها را با استفاده از 9 به دست آوریم. پس $\frac{1434}{2}$ بار از 9 استفاده می‌کنیم.

به این ترتیب در روش بهینه، به همان تعداد 2781 تا استفاده از دکمه‌ها نیاز داریم.

۱۷- پاسخ ۳۱ است.

فرض کنید که این سرباز در ردیف آخر نفر سمت چپ باشد و سربازهای هر ردیف را به ترتیب از چپ به راست با شماره‌های $0, 1, \dots, 91$ مشخص کنیم. به وضوح سرباز آخر، سرباز شماره 0 از ردیف اول را نمی‌بیند. اما برای هر $i \in \{1, 2, \dots, 91\}$ سرباز شماره i دیده می‌شود، هرگاه

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه i و ۱۲ برابر ۱ باشد. زیرا اگر i و ۱۲ مقسوم‌علیه مشترکی غیر از ۱ مثلاً j داشته باشند، سرباز شماره $\frac{i}{j}$ که در $\frac{۱۲}{j}$ ردیف

جلوتر از ردیف آخر ایستاده است، بین آن‌ها قرار دارد و بنابراین سرباز شماره i از ردیف اول دیده نمی‌شود.

بنابراین باید، تعداد اعدادی در $\{۱, ۲, \dots, ۹۱\}$ را بشماریم که نسبت به ۱۲ اول هستند، یعنی معادلاً بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر نیستند. باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر نیستند. باقی‌مانده‌ی تقسیم چنین اعدادی بر ۶ برابر ۵ یا ۱ است.

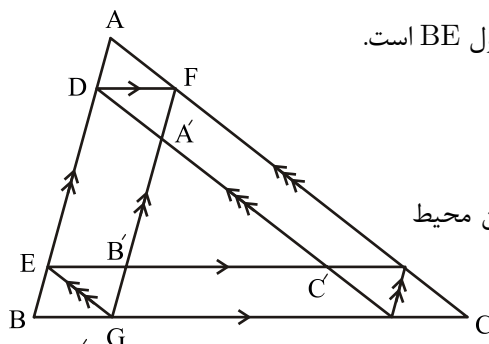
باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۶ عدد $\{۱, ۷, \dots, ۹۱\}$ در تقسیم بر ۶ برابر ۱ است. باقی‌مانده تقسیم ۱۵ عدد $\{۸۹, \dots, ۱۱۱\}$ در تقسیم بر ۶ برابر ۵ است.

پس در کل $۱۵ + ۱۶ = ۳۱$ عدد در این مجموعه وجود دارند که نسبت به ۱۲ اول هستند و بنابراین ۳۱ سرباز از ردیف اول دیده می‌شوند.

۱۸- پاسخ ۶ است.

نقطه‌های E , F و G را مطابق شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم.

در این صورت چهارضلعی‌های $EDFB'$, $BDFG$, $EDA'G$, $EAFG$, $DAFA'$ همگی متوازی‌الاضلاع هستند و در نتیجه $FB' = DE = A'G$ و $FA' = B'G$ پس $FA' = B'G$ و این مقدار برابر طول AD و همین‌طور طول BE است.



$$AB = AD + DE + EB = DE + 2AD = FB' + 2AD = A'B' + 2AD$$

با توجه به این که اضلاع $A'B'C'$ و ABC موازی هستند. این دو مثلث متشابه هستند و چون محیط

ABC دو برابر $A'B'C'$ است داریم $AB = 2A'B'$ و با توجه به بالا

$$A'B' = 3AD \quad \text{پس در نهایت:} \quad AB = A'B' + 2AD = 3AD + 2AD = 5AD$$

شش برابر AD است.

۱۹- پاسخ ۳ است.

توجه کنید که معادله‌ی صورت سوال را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$(a^2 - a + \frac{1}{4}) + (x^2 - x + \frac{1}{4}) + (y^2 - y + \frac{1}{4}) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

و در نتیجه:

$$(a - \frac{1}{2})^2 + (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

حال توجه کنید که $(x - \frac{1}{2})^2, (y - \frac{1}{2})^2$ عباراتی نامنفی هستند پس همواره $(a - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{9}{4}$ پس a همواره در بازه $[-1, 2]$ قرار دارد.

همچنین به سادگی دیده می‌شود که به ازای هر a در بازه $[-1, 2]$ با قرار دادن $x = \frac{1}{2}$ و با توجه به پوشا بودن $(y - \frac{1}{2})^2$ روی بازه $[0, \infty)$

معادله می‌تواند برقرار باشد. پس طول بازه مورد نظر برابر ۳ است.

۲۰- پاسخ ۲۸ است.

چون تصویر این چهارضلعی روی هر یک از صفحه‌ها خود یک چهارضلعی مسطح است، رأس‌های آن باید به رأس‌های چهارضلعی تصویر برود. به این ترتیب رأسی که تصویرش در صفحه xy تنها می‌تواند به $(۱, ۳)$ برود و در نتیجه مختصات آن در فضا برابر $(۱, ۰, ۳)$ است. به همین شکل سه رأس

دیگر چهارضلعی نقاط $(۱, ۰, ۳)$ و $(۰, ۲, ۰)$ و $(۰, ۲, ۰)$ است. بنابراین مجموع مربع‌های قطرهای این چهارضلعی برابر $۲(۱^2 + ۲^2 + ۳^2) = ۲۸$ است.

۲۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

با کم کردن رابطه دوم از اول داریم:

$$z(x-t) + y(x-t) = (t-x)(t+x) \Rightarrow (x-t)(x+y+z+t) = 0$$

و مشابه آن با کم کردن رابطه سوم از دوم، چهارم از سوم و اول از چهارم:

$$(y-x)(x+y+z+t) = 0, (z-y)(x+y+z+t) = 0, (t-x)(x+y+z+t) = 0$$

بنابراین اگر $x+y+z+t \neq 0$ ، چهار عدد با هم برابر می‌شوند که با جایگذاری در معادله هر چهار متغیر برابر صفر می‌شوند.

اما اگر $x+y+z+t = 0$ آنگاه $t = -x - y - z$ و در نتیجه با جایگذاری در معادله اول:

$$xy + yz + zx = (-x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 0 \Rightarrow$$

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 0 \Rightarrow x = -y, y = -z, z = -x \Rightarrow x = y = z = 0$$

و در نتیجه t هم صفر می‌شود. پس در این حالت به همان جواب $(0, 0, 0)$ می‌رسیم. بنابراین این چهارتایی تنها جواب معادله است.

۲۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

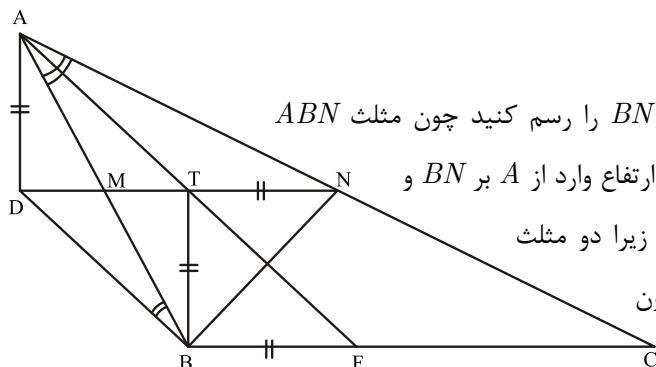
جدول زیر نشان می‌دهد که این دزد از هر کدام از شهرها چند بار خارج شده است و چند بار به هر کدام از شهرها وارد شده است.

نام شهر	شکرستان	ن. شمالی	ن. جنوبی	ن. غربی	ن. شرقی
تعداد خروج	۵	۵	۴	۴	۳
تعداد ورود	۶	۴	۴	۴	۳

بنابراین او از شکرستان ۵ بار خارج شده است و ۶ بار به این شهر برگشته است، بنابراین اکنون در این شهر است و پاسخ گزینه‌ی (۱) است.

توضیح هم چنین با استدلال مشابه می‌توان فهمید که او سفر را از نمکستان شمالی آغاز کرده است، چون ۵ بار را از این شهر خارج شده و تنها ۴ بار به آن بازگشته است.

۲۳- پاسخ ۰ است.



مطابق شکل زیر فرض کنید M وسط AB و N وسط AC باشد خط BN را رسم کنید چون مثلث ABN

متساوی‌الساقین است پس نیم‌ساز آن ارتفاع نیز هست فرض کنید H پای ارتفاع وارد از A بر BN و

T تقاطع MN با AH باشد. چهارضلعی $ADBT$ متوازی‌الاضلاع است. زیرا دو مثلث

AMT و BMD با هم برابر هستند در نتیجه $AD = BT$ از طرفی چون

مثلث ABH با مثلث ANH هم‌نهشت است بنابراین می‌توان نتیجه

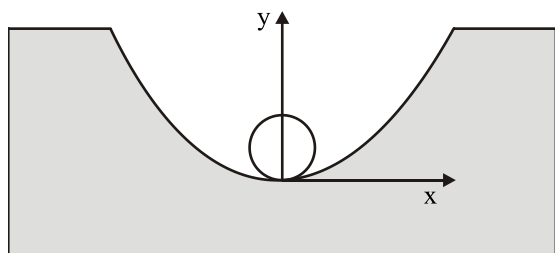
گرفت $BT = TN$ پس کافی است مقدار TN را حساب کنیم. فرض کنید F محل برخورد نیم‌ساز با ضلع BC باشد، در مثلث AFC چون TN

میان خط (خطی موازی یک ضلع که از وسط دو ضلع دیگر عبور می‌کند) است پس $TN = \frac{1}{2} FC$ و همچنین می‌دانیم نیم‌ساز، ضلع را به

$$AD = BT = TN = \frac{1}{2} FC = \frac{1}{2} \frac{AC \times BC}{AC + AB} = \frac{\sqrt{y}}{3} = 0.881 \dots$$

نسبت دو ضلع دیگر قطع می‌کند در نتیجه

ابتدا فرض می‌کنیم لوله و کانال در مبدأ با یکدیگر تماس دارند و مختصات را مانند شکل معین می‌کنیم قطر لوله در صورتی مناسب است که اگر پایین لوله (دایره) را در کف کانال (سهمی) قرار دهیم، دایره و سهمی برخورد دیگری نداشته باشند.



معادله‌ی سهمی معرفی شده در صورت سوال برابر است با: $y = 4x^2$

همچنین معادله‌ی دایره‌ی معرفی شده به قطر D و مماس بر سهمی در مبدأ برابر است با:

$$\left(y - \frac{D}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{D^2}{4} \Rightarrow y^2 - yD + \frac{D^2}{4} + x^2 = \frac{D^2}{4} \Rightarrow y^2 - yD + x^2 = 0.$$

با استفاده از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌گیریم که:

$$y^2 - yD + \frac{y}{4} = 0.$$

و معادله فوق برقرار است اگر $y = 0$ (که همان نقطه تماس است و نقطه‌ی جدیدی به حساب نمی‌آید) یا $y = D - \frac{1}{4}$ چنانچه $D \leq \frac{1}{4}$.

عددی نامثبت خواهد بود که نشان‌دهنده عدم برخورد جدید است اما اگر $D > \frac{1}{4}$ در نقطه‌ی $\left(D - \frac{1}{4}, \sqrt{\frac{D}{4} - \frac{1}{16}}\right)$ برخورد خواهند داشت و

این نشان می‌دهد که در این صورت قطر لوله مناسب نبوده است. پس حداکثر قطر لوله برابر ۲۵ متر یا همان ۲۵ سانتی‌متر است.

لم: در هر چهارضلعی محدب مجموع طول قطرها از مجموع طول دو ضلع روبرو بیشتر است. با نوشتن نامساوی مثلث برای مثلث‌های ACI و

$$BDI \text{ مشاهده می‌کنیم که: } AD + BC > AB + CD$$

ادعا می‌کنیم اگر مجموع فواصل ۹ زوج نقطه بیشترین مقدار شود، باید هر دو مسیری بین نقاط ابتدایی و انتهایی همدیگر را قطع کنند. زیرا اگر

میل نقطه A به B و میل نقطه C به D برود و AB و CD برخورد نداشته باشند، طبق لم بالا، با بردن میل نقطه A به D و میل نقطه C به B

مسیر بیشتری طی می‌شود. حال به میل نقطه B در صورت سوال نگاه کنید. این میل تنها به نقطه Y می‌تواند منتقل شود تا با تمام مسیرها

برخورد داشته باشد. (اگر به این نقطه نرود با مسیری که به نقطه Y می‌رسد برخورد ندارد). پس نقطه B به نقطه Y می‌رود. به همین شکل شمال

غربی‌ترین میل نیز باید به نقطه 3 برود. به همین طریق می‌توان بررسی کرد که میل‌های نقاط J ، I ، H ، G ، F ، E ، D ، C ، B ، A به ترتیب

و سمت راست الف نیز باید به ترتیب به نقاط 4 ، 2 ، 6 و 8 بروند تا با تمام خطوط دیگر برخورد کنند.

اما میل‌های روی قطر مربع باقی می‌مانند. این میل‌ها به هر ترتیبی به نقاط 1 ، 5 ، 9 منتقل شوند

مجموع جابه‌جایی ثابت می‌ماند. بنابراین برای جاگذاری میل نقطه الف سه حالت وجود دارد و به

طور یکتا مشخص نمی‌شود.

