دبیرستان پسرانه غیردولتی هاتف

نام‌ونام‌خانوادگی:

کلاس دوازدهم ریاضی

تاریخ: ۹۸/۱۰/۸

آزمون: هندسه

نیمسال اول ۹۹ - ۹۸

وقت: ۷۰ دقیقه

۱- اگر $A=\begin{bmatrix}۲x-y & ۵\\ z & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۲x+y\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $A=B$، در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

۲- اگر $A=[i^۲-j^۲]_{۲\times۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$ که $b_{ij}=\begin{cases}۲i+j & ;i>j\\ ۱ & ;i=j\\ i-۲j & ;i<j\end{cases}$، ماتریس AB را بیابید.

۳- اگر ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشند، حاصل $A+۲B+I_۳$ را به دست آورید.

$$B:b_{ij}=\max\{i,j\}\ \ ,\ \ A:a_{ij}=\begin{cases}i^۲+j & ;i>j\\ ۳i & ;i=j\\ j^۳-i & ;i<j\end{cases}$$

۴- اگر $A=\begin{bmatrix}۳|A| & ۲|A|\\ ۴ & \frac{۱}{۳}|A|^۲\end{bmatrix}$ و $|A|>۰$، دترمینان ماتریس $-\frac{۱}{۳}A^۲$ را بیابید.

۵- مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases}mx-y=۳\\ ۶x-(m+۱)y=۵\end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۶- اگر $A=\begin{bmatrix}a & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $|AB|=-۵۲$ باشد، مقدار a و $|A|$ را حساب کنید.

۷- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. حاصل $(A+B)^{-۱}-A^{-۱}$ را بیابید؟ آیا حاصل برابر $B^{-۱}$ است؟

۸- خط L و دو نقطهٔ A و B خارج آن، مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از خط L به فاصلهٔ d بوده $(d>۰)$ و از A و B به یک فاصله باشد.

۹- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O(۳,-۲)$ بوده و بر محور xها مماس باشد.

۱۰- معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(۲,۱)$ را بیابید که روی خط $L:x+y=۱$ وتری به طول $۲\sqrt{۳}$ جدا کند.

۱۱- در یک بیضی فاصلهٔ کانونی برابر ۸ است. اگر نقاط $B(-۲,۴)$ و $B'(-۲,-۲)$ دو سر قطر کوچک بیضی باشند، خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.

۱

$$A=B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x+y=5 \end{cases} , \ z=-2$$

$$\begin{cases} 2x\cancel{-y}=3 \\ 2x\cancel{+y}=5 \end{cases}$$

$$4x=8 \Rightarrow x=2 \ , \quad y=1 \Rightarrow x+y+z=2+1-2=1$$

۲

ابتدا ماتریس‌های A و B را با درایه‌هایشان مشخص کرده، سپس ماتریس AB را می‌یابیم:

$$A=[i^2-j^2]_{2\times 3} \Rightarrow a_{ij}=i^2-j^2$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a_{11}=0 \ , \ a_{12}=-3 \ , \ a_{13}=-8 \\ a_{21}=3 \ , \ a_{22}=0 \ , \ a_{23}=-5 \end{matrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B=[b_{ij}]_{3\times 2} \ , \ b_{ij}=\begin{cases} 2i+j & ;i>j \\ 1 & ;i=j \\ i-2j & ;i<j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} b_{11}=1 \ , \ b_{12}=-3 \\ b_{21}=5 \ , \ b_{22}=1 \\ b_{31}=7 \ , \ b_{32}=8 \end{matrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -71 & -67 \\ -32 & -49 \end{bmatrix}$$

۳

$$\begin{cases} a_{11}=3\times 1=3 \ , \quad a_{12}=2^3-1=7 \ , \quad a_{13}=3^3-1=26 \\ a_{21}=2^2+1=5 \ , \quad a_{22}=3\times 2=6 \ , \quad a_{23}=3^3-2=25 \\ a_{31}=3^2+1=10 \ , \quad a_{32}=3^2+2=11 \ , \quad a_{33}=3\times 3=9 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 26 \\ 5 & 6 & 25 \\ 10 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A+2B+I_3=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 26 \\ 5 & 6 & 25 \\ 10 & 11 & 9 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 11 & 32 \\ 9 & 11 & 31 \\ 16 & 17 & 16 \end{bmatrix}$$

۴

ابتدا از طرفین رابطهٔ فرض، دترمینان می‌گیریم:

$$|A|=\begin{vmatrix} 3|A| & 2|A| \\ 4 & \frac{1}{3}|A|^2 \end{vmatrix} \Rightarrow |A|=|A|^3-8|A|$$

$$\Rightarrow |A|^3-9|A|=0 \Rightarrow |A|\left(|A|^2-9\right)=0 \Rightarrow |A|(|A|+3)(|A|-3)=0$$

$$\Rightarrow |A|=0 \ \text{یا} \ |A|=-3 \ \text{یا} \ |A|=3 \xrightarrow{|A|>0} |A|=3 \qquad (*)$$

می‌دانیم اگر A ماتریسی $n\times n$ و k عددی حقیقی باشد، آنگاه $|kA|=k^n|A|$. بنابراین:

$$\left|-\frac{1}{3}A^2\right|=(-\frac{1}{3})^2|A^2|=(-\frac{1}{3})|A|^2 \xrightarrow{(*)} (-\frac{1}{3})^2(3)^2=1$$

۵

$$\frac{m}{6}=\frac{-1}{-(m+1)}\neq\frac{3}{5} \Rightarrow m^2+m-6=0$$

$$\Rightarrow (m+3)(m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{m}{6}\neq\frac{3}{5} \Rightarrow m\neq\frac{18}{5} \\ \frac{1}{m+1}\neq\frac{3}{5} \Rightarrow m+1\neq\frac{5}{3} \Rightarrow m\neq\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m=2, -3$$

۶ می‌دانیم $|AB| = |A||B|$ و باتوجه‌به اطلاعات داده‌شده داریم:

$$|A| = ۳a - ۲ \quad , \quad |B| = -۴$$

$$|AB| = |A||B| \Rightarrow -۵۲ = (۳a - ۲)(-۴) \Rightarrow ۳a - ۲ = ۱۳ \Rightarrow a = ۵$$

$$|A| = ۳a - ۲ \xrightarrow{a=۵} |A| = ۱۳$$

۷ خیر برابر نیست.

$$A + B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^{-۱} = \frac{۱}{-۱-۰}\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+B)^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

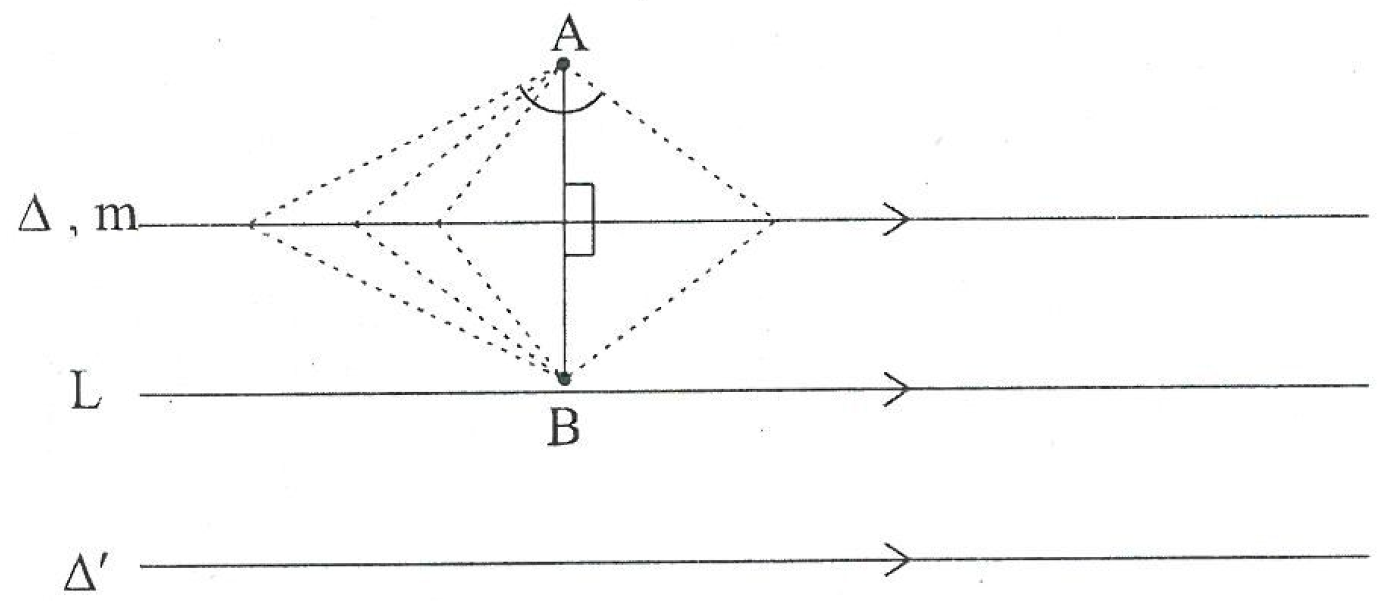
$$A^{-۱} = \frac{۱}{۰-(-۱)}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &(A+B)^{-۱} - A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix} \\ &B^{-۱} = \frac{۱}{۱-۲}\begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \end{aligned}\right\}$$

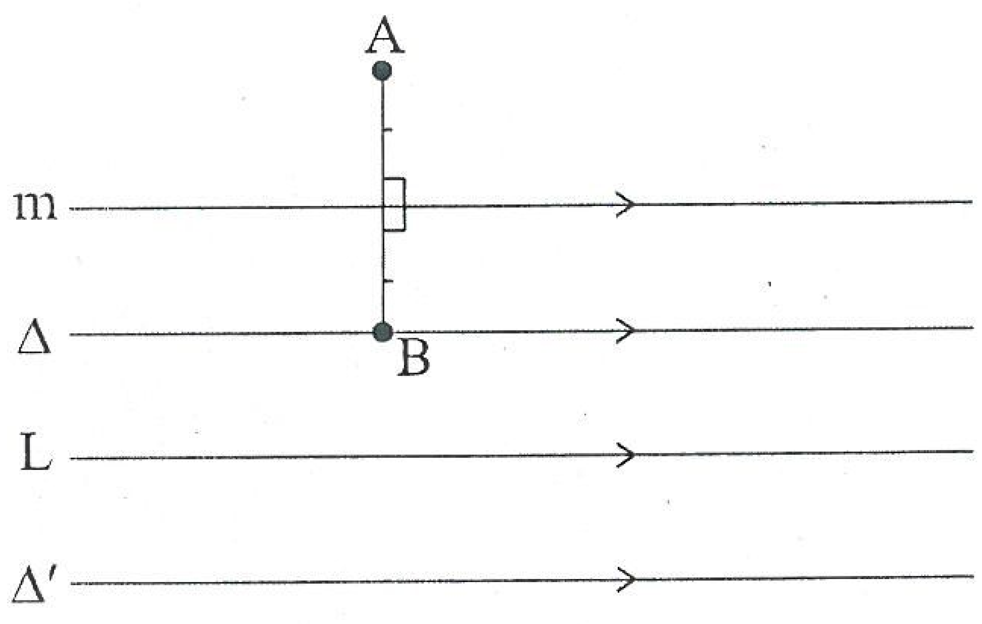
$$\Rightarrow (A+B)^{-۱} - A^{-۱} \neq B^{-۱}$$

۸ اولاً مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط L به فاصلهٔ d باشند، دو خط Δ و Δ' به موازات آن است. ثانیاً مکان هندسی نقاطی از صفحه که از A و B به یک فاصله باشند، خط m عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس جواب مسئله، محل برخورد خط m با Δ یا Δ' است که وضعیت‌های زیر را داریم:

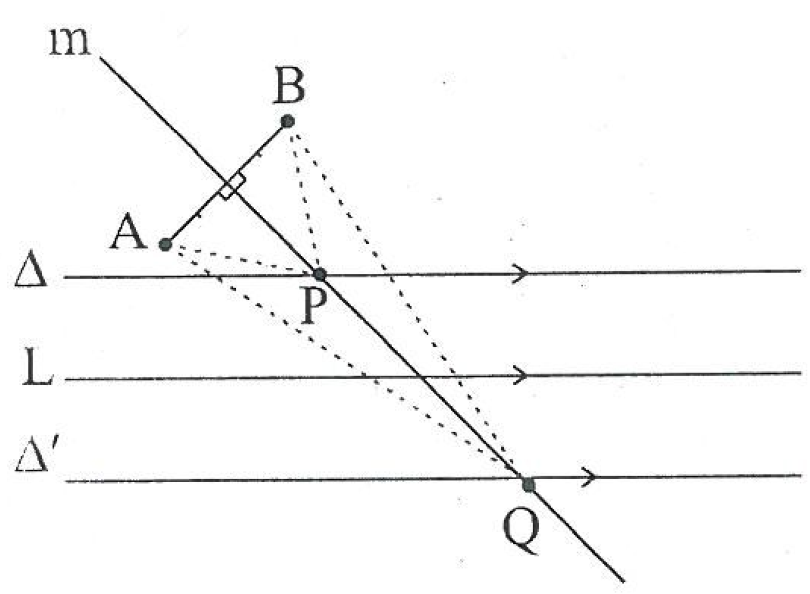
m بر یکی از Δ یا Δ' منطبق - بی‌شمار جواب:



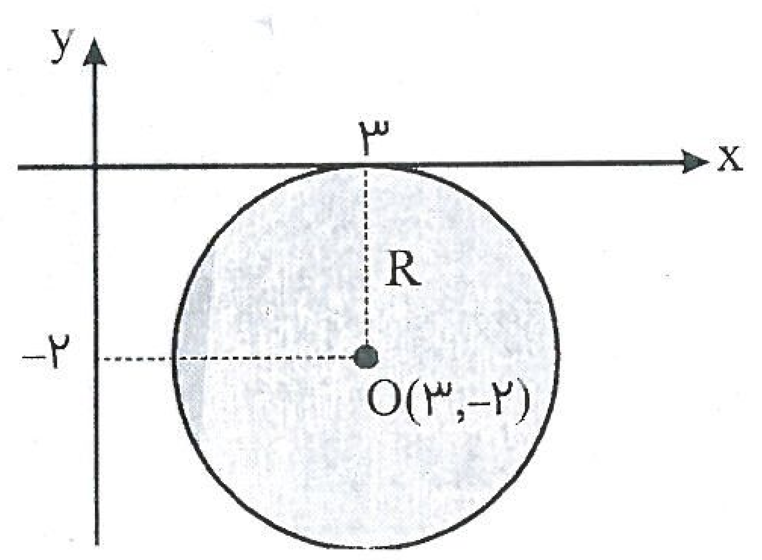
m با Δ و Δ' موازی و متمایز - فاقد جواب:



m با Δ و Δ' متقاطع - دو جواب:



۹ مطابق شکل شعاع دایره برابر با قدر مطلق عرض مرکز است؛ پس داریم: $R = |-۲| = ۲$

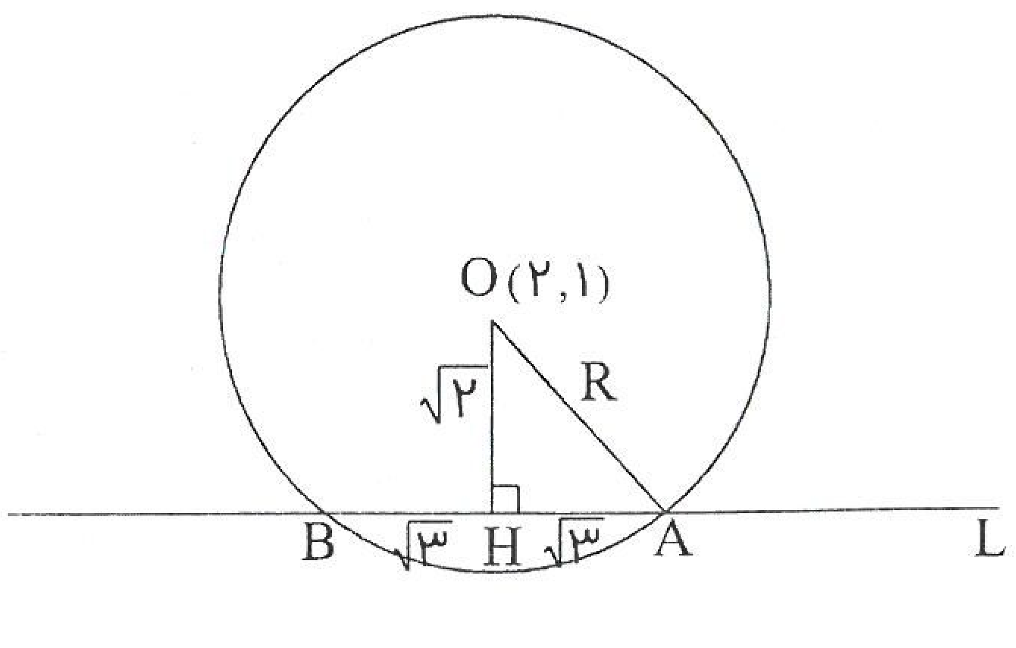


$$\Rightarrow \text{معادلهٔ دایره} : (x-۳)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴$$

۱۰ می‌دانیم فاصلهٔ نقطه $(x_\circ, y_\circ)$ از خط $ax+by+c=\circ$ برابر است با $\dfrac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$. حال فاصلهٔ مرکز دایره از خط $L: x+y-۱=\circ$ را می‌یابیم:

$$|OH| = \frac{|۲+۱-۱|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

می‌دانیم قطر عمود بر وتر، آن را نصف می‌کند. بنابراین:



$$AH = \frac{AB}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$$

$$\overset{\triangle}{OAH}: \text{قضیهٔ فیثاغورس} \Rightarrow R^۲ = (\sqrt{۲})^۲ + (\sqrt{۳})^۲ = ۵ \Rightarrow R = \sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \text{دایره}: (x-۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۵$$

۱۱ ازآنجاکه فاصلهٔ کانونی برابر $۲c = ۸$ است، بنابراین $c = ۴$ می‌شود. حال برای به دست آوردن b داریم:

$$۲b = BB' = \sqrt{(-۲-(-۲))^۲ + (-۲-۴)^۲} = \sqrt{۳۶} = ۶ \Rightarrow ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

حال باتوجه‌به رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ در بیضی داریم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{۴}{۵}$ است.