



جمهوری اسلامی ایران
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره آموزش و پرورش منطقه هفت تهران

ساعت امتحان: ۱۲
وقت امتحان: ۱۱۰ دقیقه
تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۱۰/۱۰
تعداد برگ سوال: یک برگ

نام واحد آموزشی: دبیرستان غیر دولتی هاتف (دوره دوم)
نام و نام خانوادگی: پابه سوم
امتحان درس: هندسه
نوبت امتحانی: دی ماه
رشته: ریاضی
نام دبیر: آقای محمدکریمی
سال تحصیلی: ۹۴ - ۹۳

با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه‌ای دلخواه مانند O درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC از سه ضلع آن، برابر ارتفاع مثلث است.

در مثلث ABC داریم $AB = 6$ ، $AC = 9$ و $BC = 10$. اگر نیمسازهای داخلی و خارجی نظیر رأس A، ضلع BC و امتداد آن را به ترتیب در M و N قطع کنند، اندازه‌ی پاره خط MN را به دست آورید.

در مثلث ABC نقاط D و E به ترتیب روی اضلاع AB و AC به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که $BD = CE$ باشد. اگر ضلع AC بزرگ‌تر از ضلع AB باشد، ثابت کنید BE کوچک‌تر از CD است.

مثلث ABC با دو میانه‌ی $m_a = 9$ و $m_b = 12$ و ضلع $AC = b$ مفروض است. حدود b را بیابید.

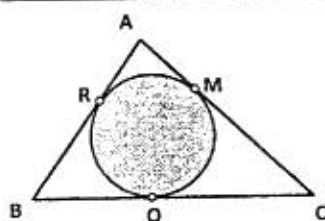
قضیه: ثابت کنید سه عمود منصف هر مثلث، هم‌رس‌اند.

مثلث ABC را با معلوم بودن اندازه‌های ضلع $BC = a$ ، میانه‌های $BB' = m_b$ و $CC' = m_c$ رسم کنید. (روش رسم را توضیح دهید).

وترهای AB و CD از دایره $C(O, r)$ در نقطه M متقاطع و بر هم عمودند. ثابت کنید:

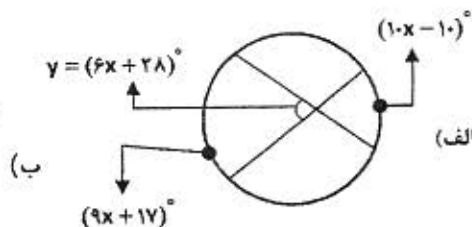
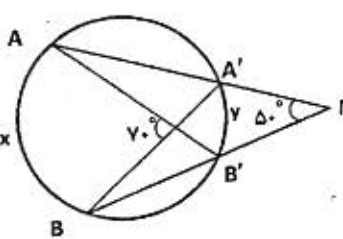
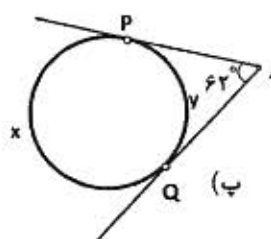
$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 4r^2$$

شعاع‌های دو دایره‌ی هم مرکز ۱۳ و ۱۲ سانتی‌متر است. اندازه‌ی وترى از دایره‌ی بزرگ‌تر را که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است، پیدا کنید.

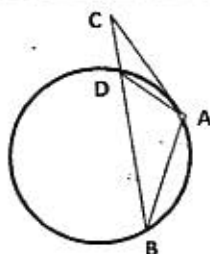


در شکل مقابل، ضلع‌های مثلث ABC در نقطه‌های M، Q و R بر دایره‌ی مماس هستند. اگر محیط مثلث برابر ۲p و اندازه ضلع BC برابر a باشد، ثابت کنید: $AM = p - a$

قضیه: اگر در چهارضلعی ABCD، زاویه‌های روبه‌رو، مکمل یکدیگر باشند، ثابت کنید این چهارضلعی محاطی است. در شکل‌های زیر، مقادیر x و y را به دست آورید:



در دایره‌ی شکل روبه‌رو، مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند. خط BC دایره را در نقطه‌ی D قطع کرده‌است. ثابت کنید مثلث ADC متساوی‌الساقین است.



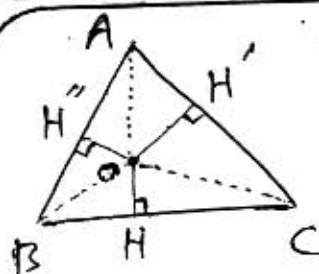
پاره خط AB به طول ۸ سانتی‌متر و کمان درخور زاویه‌ی 60° روبه‌رو به این پاره خط، مفروض است. شعاع دایره‌ای را که این کمان درخور، بخشی از آن است و فاصله‌ی مرکز این دایره از این پاره خط را تعیین کنید.

پاسخ‌نامه سفید داده شود

پاسخ سوالات در روی برگ سوال نوشته شود، نیاز به پاسخ‌نامه سفید ندارد.

ساعت امتحان: ۱۲ صبح
تاریخ امتحان: ۱۰/۱۰/۹۳
تعداد برگ راهنمای تصحیح: ۲ برگ

نام واحد آموزشی: دبیرستان هاتف
نام دبیر: آمار محمد کریمی
پایه: نهم

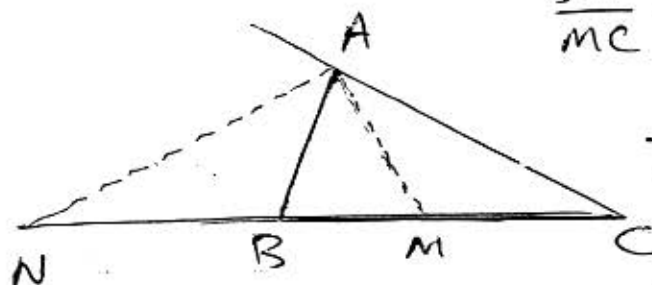


۱- برهان: از رابطه $S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB} = S_{ABC} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} BC \times OH + \frac{1}{2} AC \times OH' + \frac{1}{2} AB \times OH'' = \frac{1}{2} BC \times h$$

$$\frac{1}{2} BC (OH + OH' + OH'') = \frac{1}{2} BC \times h \Rightarrow$$

$$OH + OH' + OH'' = h$$

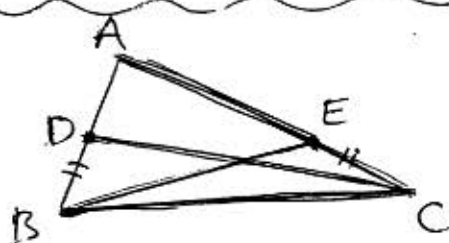


$$\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \rightarrow$$

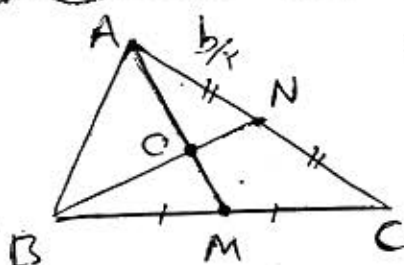
$$\frac{BM}{BM+MC} = \frac{2}{2+3} \Rightarrow BM = \frac{2}{5} \times 10 = 4$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{BN}{NC-BN} = \frac{2}{3-2} \Rightarrow BN = 2 \times 1 = 2$$

$$MN = BM + NB = 4 + 2 = 6$$



$$\left. \begin{array}{l} AB < AC \rightarrow \hat{C} < \hat{B} \\ CE = BD \\ BC = BC \end{array} \right\} \Rightarrow BE < CD$$

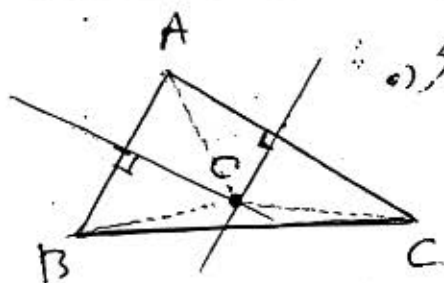


$$AO = \frac{2}{3} \times 9 = 6 \quad BO = \frac{2}{3} \times 12 = 8$$

$$ON = \frac{1}{3} \times 12 = 4$$

$$|6-4| < \frac{b}{2} < 6+4 \rightarrow 4 < b < 10$$

۵- برهان: عمود منصف های اضلاع AB و AC را رسم کرده تا یکدیگر را در نقطه O قطع کنند.



$$\left. \begin{aligned} O \text{ روی عمود منصف } AB \text{ قرار دارد} &\Rightarrow OA = OB \\ O \text{ روی عمود منصف } AC \text{ قرار دارد} &\Rightarrow OA = OC \end{aligned} \right\} \Rightarrow OB = OC$$

O روی عمود منصف BC قرار دارد، پس عمود منصف هر اضلاع هم می‌اند.

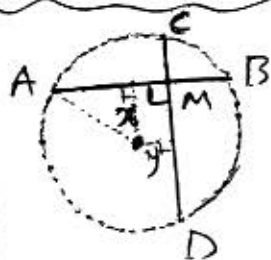
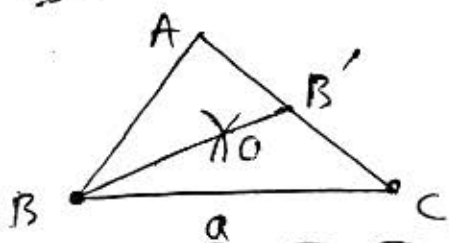
۶- (۱) پاره خط BC را به اندازه a رسم می‌کنیم.

(۲) دو کمان به مرکز B و C و به شعاع های $\frac{1}{2}m$ و $\frac{1}{2}m$ می‌زنیم تا یکدیگر را در نقاط O قطع کنند.

(۳) پاره خط BO را رسم کرده و به اندازه $\frac{1}{2}m$ ادامه داده تا به نقطه B' برسیم.

(۴) پاره خط CO را رسم کرده و به اندازه خودش ادامه داده تا به نقطه A برسیم.

(۵) از A به B وصل می‌کنیم.



$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + x^2 = R^2 \rightarrow$$

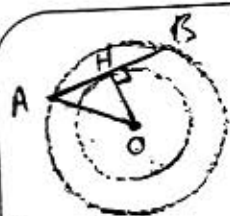
$$\left(\frac{AM+BM}{2}\right)^2 + \left(DM - \frac{CD}{2}\right)^2 = R^2$$

$$\left(\frac{AM+BM}{2}\right)^2 + \left(DM - \frac{DM+MC}{2}\right)^2 = R^2$$

$$\left(\frac{AM+BM}{2}\right)^2 + \left(\frac{DM-MC}{2}\right)^2 = R^2$$

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 + 2AM \cdot BM - 2DM \cdot MC = 4R^2$$

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 4R^2$$



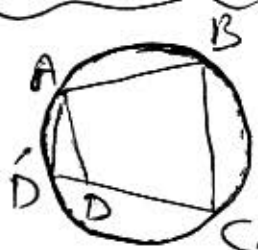
$$AH^2 + r^2 = R^2 \rightarrow \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (12)^2 = (13)^2 \Rightarrow \quad - 8$$

$$\frac{AB}{2} = 5 \Rightarrow AB = 10.$$

۹- با توجه به این که محاسباتی رسم شده از هر نقطه بیرون یک دایره، برابر اند داریم:

$$AM = AR = x, \quad BR = BQ = y, \quad CQ = CM = z$$

$$2x + 2y + 2z = 2p \rightarrow x + y + z = p \rightarrow x = p - (y + z) = p - a$$



$$\text{فرض} \quad A + C = B + D = 180^\circ$$

ABCD یک مثلث است

۱۰- برهان: دایره گذر از سه نقطه

A، B و C را رسم می‌کنیم. فرض کنیم این دایره از نقطه D نگذرد و استدلال CD را در نقطه دیگری مانند D' قطع کند (فرض خلاف).

$$\left. \begin{array}{l} ABCD' \Rightarrow B + D' = 180^\circ \\ B + D = 180^\circ \text{ فرض قفله} \end{array} \right\} \Rightarrow D' = D \quad \times$$

چون با فرض متضاد بودیم D و D'، نمی‌تواند برابر D باشد پس فرض خلاف باطل است و چهارضلعی ABCD یک مثلث است.

$$4x + 28 = \frac{(9x + 17) + (4x - 10)}{2} \Rightarrow x = 7, y = 7 \quad (11 - الف)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+y}{2} = 7 \rightarrow x+y = 14 \\ \frac{x-y}{2} = 5 \rightarrow x-y = 10 \end{array} \right. \Rightarrow x = 12, y = 2 \quad (ب)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-y}{2} = 42 \rightarrow x-y = 84 \\ x+y = 34 \end{array} \right. \Rightarrow x = 59, y = -11 \quad (پ)$$

$$\begin{array}{l}
 AB = AC \rightarrow \hat{B} = \hat{C} \\
 \left. \begin{array}{l} \text{و } \hat{C}AD = \frac{AD}{r} \\ \text{و } \hat{B} = \frac{AD}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}AD \Rightarrow AD = CD
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \hat{C} = \hat{C}AD \Rightarrow AD = CD$$

- 12

$$\text{ع } R = \frac{AB}{r \sin \alpha} = \frac{\Lambda}{r \times \sin 45^\circ} = \frac{r}{\frac{r}{\sqrt{r}}} = \frac{\Lambda}{\sqrt{r}}$$

- 13

$$OH = \frac{AB}{r |\tan \alpha|} = \frac{\Lambda}{r \times \tan 45^\circ} = \frac{r}{\sqrt{r}}$$