محل مهر یا امضاء مدیر

جمهوری اسلامی ایران

اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران

اداره آموزش و پرورش منطقه هفت تهران

ساعت امتحان : ۷:۳۰ صبح
وقت امتحان : ۹۰دقیقه
تاریخ امتحان : ۱۳۹۶ / ۱۰ / ۱۲
تعداد برگ سؤال : ۱ برگ

ش صندلی(ش داوطلب) : نام واحد آموزشی: دبیرستان هاتف (دوره‌ی دوم) نوبت امتحانی : دی ماه
نام خانوادگی: نام: نام پدر: پایه: چهارم
سؤال امتحان درس: هندسه نام دبیر: جناب آقای هویدی سال تحصیلی: ۹۷-۹۶

۱. اگر $|\vec{a}| = ۴$ و $|\vec{b}| = ۵$ و اندازه مساحت متوازی الاضلاعی که روی دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ ساخته می شود برابر ۲۰ باشد، حاصل $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را بیابید.(۱٫۵)

۲. بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ دو به دو با یکدیگر زاویه ۶۰° می سازند. اگر اندازه های آن ها به ترتیب برابر ۲ و ۳ و ۴ باشند، اندازه بردار $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ را بیابید.(۱٫۵)

۳. مثلثی با رأس های $A(-۱,-۲,۴)$ و $B(-۴,-۲,۰)$ و $C(۳,-۲,۱)$ مفروض است. زاویه داخلی رأس B را بیابید. (۱.۵نمره)

۴. اگر $|\vec{a}| = ۱۱$ و $|\vec{b}| = ۲۳$ و $|\vec{a}-\vec{b}| = ۳۰$ باشد، $|\vec{a}+\vec{b}|$ را بیابید. (۱نمره)

۵. وضعیت نسبی دو خط $\frac{x-۱}{۲} = y = z+۱$ و $\frac{z-۱}{۳} = \frac{y}{۲} = x+۱$ را تعیین کنید. (۱٫۲۵)

۶. معادله صفحه ای را بنویسید که از سه نقطه $A(۱,۲,۰)$ و $B(-۱,۳,-۱)$ و $C(-۱,۰,۱)$ عبور کند. (۱٫۲۵)

۷. معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(۱,۰,۲)$ گذشته و با خط $\frac{x}{۲} = \frac{y-۳}{۵} = \frac{z-۱}{۴}$ عمود متقاطع باشد. (۱.۵نمره)

۸. مختصات قرینه نقطه $(۱,۰,۱)$ را نسبت به خط $x = \frac{y-۱}{۲} = z-۱$ بیابید.(۱نمره)

۹. معادله بیضی را بنویسید که $A(۱,۷)$ و $A'(۱,-۵)$ دو سر قطر بزرگ آن بوده و خروج از مرکز آن $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ باشد. (۱٫۵)

۱۰. a و b را چنان تعیین کنید که نقطه $S(-۱,۲)$ رأس سهمی $x = y^۲ + ay + b$ شود. (۱٫۵)

۱۱. معادله دایره ای را بنویسید که از سه نقطه $A(۱,۱)$ و $B(۱,-۱)$ و $C(۲,۰)$ عبور کند. (۱.۵)

پاسخ سؤالات در روی برگ سؤال نوشته شود، نیاز به پاسخنامه سفید ندارد. ☐ پاسخنامه سفید داده شود. ■

.۱

$$S=\left|(\vec a+\vec b)\times(\vec a-\vec b)\right|=\left|-\vec a\times\vec b+\vec b\times\vec a\right|=۲\left|\vec b\times\vec a\right|$$

$$S=۲۰\Rightarrow ۲\left|\vec b\times\vec a\right|=۲۰\Rightarrow\left|\vec b\times\vec a\right|=۱۰\Rightarrow ۵\times۴\times\sin\theta=۱۰\Rightarrow\sin\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow\vec a\cdot\vec b=۴\times۵\times(\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\pm۱۰\sqrt{۳}$$

.۲

$$\left|\vec a+\vec b+\vec c\right|^{۲}=|\vec a|^{۲}+\left|\vec b\right|^{۲}+|\vec c|^{۲}+۲\vec a\cdot\vec b+۲\vec a\cdot\vec c+۲\vec b\cdot\vec c$$

$$\vec a\cdot\vec c=|\vec a|\,|\vec c|\cos ۶۰^{\circ}=۲\times۴\times\frac{۱}{۲}=۴$$

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\,\left|\vec b\right|\cos ۶۰^{\circ}=۲\times۳\times\frac{۱}{۲}=۳$$

$$\vec b\cdot\vec c=\left|\vec b\right|\,|\vec c|\cos ۶۰^{\circ}=۳\times۴\times\frac{۱}{۲}=۶$$

$$\left|\vec a+\vec b+\vec c\right|^{۲}=۴+۹+۱۶+۶+۸+۱۲=۵۵\Rightarrow\left|\vec a+\vec b+\vec c\right|=\sqrt{۵۵}$$

.۳ زاویه $\widehat{B}$ ، زاویه بین پیکان های $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ است.

$$\begin{cases}\overrightarrow{BA}=(۳,۰,۴)\\ \overrightarrow{BC}=(۷,۰,۱)\end{cases}\Rightarrow\cos\widehat{B}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{۲۱+۴}{۵\times\sqrt{۵۰}}=\frac{۵}{\sqrt{۵۰}}=\frac{\sqrt{۵۰}}{۱۰}\Rightarrow\widehat{B}=\cos^{-۱}(\frac{\sqrt{۵۰}}{۱۰})$$

.۴

$$\left|\vec a-\vec b\right|^{۲}=|\vec a|^{۲}+\left|\vec b\right|^{۲}-۲\vec a\cdot\vec b\Rightarrow ۹۰۰=۵۲۹+۱۲۱-۲\vec a\cdot\vec b\Rightarrow\vec a\cdot\vec b=-۱۲۵$$

$$\left|\vec a+\vec b\right|^{۲}=|\vec a|^{۲}+\left|\vec b\right|^{۲}+۲\vec a\cdot\vec b=۵۲۹+۱۲۱+۲(-۱۲۵)=۴۰۰\Rightarrow\left|\vec a+\vec b\right|=۲۰$$

.۵ خط اول را D و خط دوم را D' می نامیم:

$$\vec L_D=(۲,۱,۱)\ ,\ \vec L_{D'}=(۱,۲,۳)$$

چون هادی های دو خط موازی نیستند، پس دو خط یا متقاطعند یا متنافر.

یک نقطه به صورت پارامتری از D در نظر می گیریم.

$$A(۲t+۱,t,t-۱)$$

این نقطه را روی خط دیگر قرار می دهیم:

$$۲t+۲=\frac{t}{۲}=\frac{t-۲}{۳}\Rightarrow\begin{cases}۲t+۲=\frac{t}{۲}\Rightarrow ۴t+۲=t\Rightarrow t=-\frac{۲}{۳}\\ \frac{t}{۲}=\frac{t-۲}{۳}\Rightarrow ۳t=۲t-۴\Rightarrow t=-۴\end{cases}\Rightarrow$$ دو خط متنافرند.

.۶ چون بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ در صفحه مطلوب قرار دارند ضرب خارجی آن ها برداری است که بر این صفحه عمود است، پس می تواند نرمال صفحه باشد.

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-۲,۱,-۱)\\ \overrightarrow{AC}=(-۲,-۲,۱)\end{cases}\Rightarrow\vec N_P=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}-۲&۱&-۱\\-۲&-۲&۱\end{vmatrix}=(-۱,۴,۶)$$

ضمناً صفحه از نقطه $A(۱,۲,۰)$ هم عبور می کند، پس معادله آن به صورت زیر درمی آید:

$-x+4y+6z=-1+8+0 \Rightarrow -x+4y+6z=7$

۷. اگر خط مطلوب را Δ فرض کنیم، چون Δ با خط D متقاطع است پس نقطه ای از D وجود دارد که روی Δ نیز هست.

$$D: \frac{x}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{4} \Rightarrow M(2t, 5t+3, 4t+1)$$

$$\overrightarrow{AM}=(2t-1, 5t+3, 4t-1)$$

$\overrightarrow{AM}$ برداری روی Δ است و چون Δ بر D عمود است، پس $\overrightarrow{AM}$ بر $\overrightarrow{L}D$ نیز عمود است.

$$\overrightarrow{L}D=(2,5,4) \Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{L}D=0 \Rightarrow 4t-2+25t+15+16t-4=0$$

$$\Rightarrow 45t=-9 \Rightarrow t=-\frac{1}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(-\frac{7}{5}, 2, \frac{9}{-5})$$

هادی خط Δ می تواند هر مضربی از $\overrightarrow{AM}$ باشد، پس: $\overrightarrow{L}\Delta=(-7, 10, -9)$

با داشتن نقطه A و $\overrightarrow{L}\Delta$ معادله خط Δ به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{x-1}{-7}=\frac{y}{10}=\frac{z-2}{-9}$$

۸. A' نقطه ای روی O است، پس از فرم پارامتری D پیروی می کند.

$$\begin{cases} A'(t, 2t+1, t+1) \\ A(1,0,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AA'}=(t-1, 2t+1, t)$$

چون $\overrightarrow{AA'}$ بر $\overrightarrow{L}D$ عمود است پس:

$$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{L}D=0 \Rightarrow (t-1, 2t+1, t)\cdot(1,2,1)=0 \Rightarrow t-1+4t+2+t=0$$

$$\Rightarrow t=-\frac{1}{6} \Rightarrow A'(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}) \Rightarrow A''=2A'-A=(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$$

۹. نقطه O وسط A و A' است پس $O(1,1)$ است.

$$|OA|=a=6$$

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \frac{c}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow c=\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 36=b^2+\frac{20}{9} \Rightarrow b^2=\frac{304}{9}$$

ضمناً بیضی قائم است، پس معادله آن به صورت زیر در می آید:

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{304}{9}}+\frac{(y-1)^2}{36}=1$$

۱۰. ابتدا معادله را مرتب می کنیم:

$$y^2+ay-x+b=0 \Rightarrow 2y+a=0 \xrightarrow{y_S=2} 4+a=0 \Rightarrow a=-4$$

ضمناً مختصات رأس، در معادله سهمی صدق می کند، بنابراین:

$$4-4\times 2+1+b=0 \Rightarrow 4-8+1+b=0 \Rightarrow b=3$$

۱۱. معادله ضمنی دایره به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ نوشته می شود. A و B و C روی دایره هستند، پس مختصات آن ها در معادله دایره صدق می کنند.

$$۱+۱+a+b+c=۰ \Rightarrow a+b+c=-۲$$
$$۱+۱+a-b+c=۰ \Rightarrow a-b+c=-۲$$
$$۴+۰+۲a+c=۰ \Rightarrow ۲a+c=-۴$$

رابطه های اول و دوم را از هم کم می کنیم:

$$۲b=۰ \Rightarrow b=۰$$

رابطه های اول و دوم را با هم جمع می کنیم:

$$\begin{cases} ۲a+۲c=-۴ \\ ۲a+۲c=-۴ \end{cases} \Rightarrow c=۰ \Rightarrow a=-۲$$

پس معادله دایره مورد نظر به صورت $x^۲+y^۲-۲x=۰$ درمی آید.

پاسخنامه کلیدی آزمون .

۱-	۲-	۳-	۴-	۵-
۶-	۷-	۸-	۹-	۱۰-
۱۱-				