



جمهوری اسلامی ایران
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره آموزش و پرورش منطقه هفت تهران

نام واحد آموزشی: دبیرستان غیر دولتی هاتف (دوره دوم)	نوبت امتحانی: دی ماه
نام و نام خانوادگی:	پایه: چهارم
رشته: ریاضی	سال تحصیلی: ۹۵ - ۹۶
نام دبیر: آقای مشایخی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۵/۱۰/۱۶
امتحان درس: هندسه تحلیلی	ساعت امتحان: ۸ صبح
	وقت امتحان: ۶۰ دقیقه
	تعداد برگ سؤال: یک برگ

۱- اگر a (۳ و -۱ و ۲) و b (۳ و ۲ و -۱) باشد، قرینه بردار a را نسبت به b بدست آورید.

۲- اگر A (۱ و -۲ و -۳) و B (۲ و ۳ و ۴) و C (۵ و ۱ و ۵) سه رأس مثلث ABC باشند زاویه B

در این مثلث چند درجه است؟

۳- معادله خط گذرنده از نقطه (۲ و ۱ و ۰) و عمود متقاطع بر خط $x = y - 2 = z - 1$ را بیابید.

۴- معادله صفحه ای که از نقطه (۱ و -۲ و -۱) گذشته و با بردارهای $\vec{a}$ (۲ و -۱ و ۲) و $\vec{b}$ (۳ و -۳ و ۰) موازی باشد را بنویسید.

۵- دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x = 1$ و $x^2 + y^2 = 9$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۶- معادله بیضی که کانون های آن F (۰ و ۰) و F' (۸ و ۰) و یک رأس آن نقطه (۳ و ۴) باشد کدام است؟

۷- معادله سهمی که کانون آن نقطه (۳ و ۳) بوده و معادله خط هادی آن $y = 5$ باشد را بنویسید.

۸- فاصله هر کانون هذلولی $9x^2 - 3y^2 = 36$ از هر مجانب آن را بیابید.

☐ پاسخنامه سفید داده شود.

☐ پاسخ سؤالات در روی برگ سؤال نوشته شود، نیاز به پاسخنامه سفید ندارد.

۱) اگر معادله $(a-1)x^2 + y^2 + (c-2)xy + dx - 2y + 5 = 0$ دایره باشد، کمترین مقدار طبیعی $a+c+d$ کدام است؟

- (۲) ۷
(۴) ۹

- (۱) ۴
(۳) ۸

۲) معادله خط گذرنده از نقاط $A = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ صفحه xOz را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

- (۲) $(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$
(۴) $(\frac{-1}{2}, 0, \frac{-3}{2})$

- (۱) $(\frac{-1}{2}, 0, \frac{3}{2})$
(۳) $(\frac{1}{2}, 0, \frac{-3}{2})$

۳) در بیضی به معادله $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 9 = 0$ در نقاط F و F' (دو کانون بیضی) دو عمود بر قطر بزرگ رسم می‌کنیم تا بیضی را در چهار نقطه قطع کنند. این چهار نقطه را به هم وصل می‌کنیم. مساحت چهار ضلعی به وجود آمده چقدر است؟

- (۲) $\frac{16\sqrt{5}}{9}$
(۴) $\frac{16\sqrt{5}}{3}$

- (۱) $\frac{8\sqrt{5}}{9}$
(۳) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$

۴) اگر a و b دو بردار غیر صفر و غیر موازی و هم‌اندازه باشند و $|e_a + e_b| = 1$ آنگاه زاویه بین دو بردار a و $b-a$ کدام است؟

- (۲) 90°
(۴) 150°

- (۱) 30°
(۳) 60°

۵) اگر e_1, e_2 بردارهای واحد هم‌راستا نباشند و $|e_1 + e_2| = \sqrt{3}$ آنگاه حاصل عبارت $(2e_1 - e_2) \cdot (3e_1 + 2e_2)$ کدام است؟

- (۲) $\sqrt{3}$
(۴) $\frac{7}{2}$

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(۳) $\frac{9}{2}$

۶) فاصله مبدأ مختصات از خط $D: \begin{cases} x+z=4 \\ 2x-z=5 \end{cases}$ چقدر است؟

- (۲) ۳
(۴) $\sqrt{10}$

- (۱) ۲
(۳) $2\sqrt{10}$

۷) قرینه بردار a را نسبت به راستای بردار b بردار a'' می‌نامیم اگر بردار a'' بردار $a-b+a''$ مساوی بردار $(2, 2, 1)$ باشد، آنگاه تصاویر بردار b کدام می‌تواند باشد؟

- (۲) $\frac{1}{3}(2, 2, -1)$
(۴) $-\frac{1}{3}(-2, 2, 1)$

- (۱) $\frac{1}{3}(2, 2, 1)$
(۳) $-\frac{1}{3}(2, -2, 1)$

۸) معادله صفحه شامل $A = (-2, 1, 3)$ و محور z ها به کدام صورت است؟

- (۲) $x+y+1=0$
(۴) $x-y+z=0$

- (۱) $z=3$
(۳) $x+2y=0$

۹) خطی که از نقطه $A(-1, 0, 2)$ گذشته و با محورهای ox و oy زاویه‌های $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{3\pi}{4}$ می‌سازد، صفحه xOy را در نقطه (α, β, γ) قطع می‌کند. $3\alpha + 2\beta + \gamma$ کدام است؟

- (۲) $9+4\sqrt{2}$
(۴) $3-4\sqrt{2}$

- (۱) $3+4\sqrt{2}$
(۳) $9-4\sqrt{2}$

هزینه کتبی ۳۰۰
در صورتی ۱۰۰

۱۰ اگر نقاط $A(-3, -2, 1)$ و $B(4, 3, 2)$ و $C(5, 1, 5)$ سه رأس مثلث ABC باشند آنگاه کسینوس زاویه B برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(۴) صفر

۱۱ اگر $|a+b| = 2\sqrt{5}$ و $|a-b| = 2\sqrt{7}$ آنگاه $\frac{2}{3}a \cdot b$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\frac{8}{3}$
(۲) $\frac{4}{3}$
(۳) $\frac{8}{3}$
(۴) $-\frac{4}{3}$

۱۲ اگر $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 20$ باشد آنگاه ماکزیمم $3x + 2y - z$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱۵
(۲) ۵
(۳) ۱۰
(۴) ۲۰

۱۳ سهمی با کانون $(2, -1)$ و خط هادی $x = 4$ محور y ها را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. فاصله A تا B چقدر است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$
(۲) ۴
(۳) $4\sqrt{3}$
(۴) ۵

۱۴ شیب مجانب‌های هذلولی $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ کدام است؟

- (۱) ± 2
(۲) ± 4
(۳) $\pm\sqrt{2}$
(۴) ± 1

۱۵ نقاط $A = (3, 0, 0)$ ، $B = (0, 2, 0)$ و $C = (0, 0, 4)$ رؤس یک مثلث‌اند. اگر ارتفاع این مثلث باشد، آنگاه مجموع مؤلفه‌های H کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{5}$
(۲) $\frac{4}{5}$
(۳) $\frac{12}{5}$
(۴) $\frac{9}{5}$

۱۶ خط به معادله $\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{m} = \frac{z+2}{4}$ کدام یک از محورهای ox ، oy و oz را می‌تواند قطع کند؟

- (۱) فقط محور ox
(۲) فقط محور oz
(۳) محورهای ox و oy
(۴) محورهای ox و oz

۱۷ دو دایره به معادله‌های $C: x^2 + y^2 - 6x + 4y + m = 0$ و $C': x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$ دقیقاً یک مماس مشترک دارند، m کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) -۱۲
(۳) ۱۵
(۴) -۱۵

۱۸ کانون سهمی $(x-3)^2 + y^2 = 2x^2 + (y-2)^2$ کدام است؟

- (۱) $(3, 2)$
(۲) $(3, 3)$
(۳) $(-3, -\frac{5}{2})$
(۴) $(-3, -\frac{5}{2})$

۱۹ خطی که از نقطه $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ گذشته و بر هر دو خط $L: x = \frac{y+1}{2} = z-1$ و $L': \begin{cases} 2x+y=4 \\ z=5 \end{cases}$ عمود باشد، از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟

- (۱) $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
(۲) $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
(۳) $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
(۴) $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

۲۰ خط $y = m$ بر بیضی به معادله $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$ مماس است. m کدام است؟

- (۱) صفر و -۴
(۲) ۰ و ۲
(۳) ۰ و ۴

- (۲) صفر و ۱
(۴) ۲ و ۴

گزینه ۳

$$|e_1 + e_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow |e_1|^2 + |e_2|^2 + 2|e_1||e_2|\cos\theta = 2$$

$$\Rightarrow 2\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$(y^2 e_1 + y^2 e_2) \cdot (y^2 e_1 - e_2) = y^4 |e_1|^2 - y^2 |e_1||e_2| \cos\theta + y^2 e_1 \cdot e_2$$

$$\Rightarrow y^4 - y^2 + \cos 60^\circ = y^4 + \frac{1}{y} = \frac{9}{y}$$

گزینه ۴

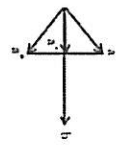
$$D: \begin{cases} x+z=F \\ yx-z=\Delta \end{cases} \Rightarrow D: \begin{cases} x=y \\ z=1 \end{cases}$$

$$O(0,0,0), A=(y^2,0,1) \Rightarrow \vec{OA}=(y^2,0,1), \vec{OD}=(0,1,0)$$

$$\text{فاصله} = \frac{|\vec{OA} \times \vec{OD}|}{|\vec{OD}|} = \frac{\sqrt{1^2+0^2}}{1} = \sqrt{1}$$

گزینه ۱

بردار a' مساوی بردار $y a'$ است و $y a'$ در راستای بردار b قرار دارد پس بردار a' در راستای b قرار می‌گیرد پس بردار واحد b می‌تواند همان بردار واحد $(y^2, y^2, 1)$ باشد $e_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(y^2, y^2, 1)$



گزینه ۳

معادله صفحه شامل $A(-y^2, 1, y^2)$ است و $ax+by=0$ است و کافی است مختصات A را در آن صدق دهیم:

$$-y^2 a + b = 0 \Rightarrow b = y^2 a \Rightarrow ax + y^2 ay = 0 \Rightarrow x + y^2 y = 0$$

گزینه ۴

اگر x, y, z زاویه‌های هادی یک بردار باشند آنگاه:

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 z = 1 \Rightarrow \cos^2 z = 0 \Rightarrow \cos z = 0 \Rightarrow z = \pm \frac{\pi}{2}$$

بردار هادی هر خط مضرباً از $(\cos x, \cos y, \cos z)$ است، پس:

$$\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ یا } (1, -\sqrt{2}, \pm 1)$$

معادله ۱: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-0}{-\sqrt{2}} = \frac{z-y}{1}$

معادله ۲: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-0}{-\sqrt{2}} = \frac{z-y}{-1}$

معادله ۱: $x+1 = \frac{y}{-\sqrt{2}} = -y \Rightarrow x = -y^2, y = y^2/\sqrt{2}$

z را برابر صفر می‌گیریم:

گزینه ۴

ضرب ۱۶ نباید در دایره باشد:

$$a-1=1 \Rightarrow a=y$$

$$c-y=0 \Rightarrow c=y$$

$$d^2 + F - F \times \Delta > 0 \Rightarrow d^2 > 16 \Rightarrow d = \Delta$$

کمترین مقدار: $y+y+\Delta=9$

گزینه ۲

نقطه تقاطع $M = \left(\frac{1}{y}, \frac{1}{y}, \frac{1}{y} \right)$ است.

$$\vec{u} = \vec{AB} = (-1, y, -1) \Rightarrow \text{معادله خط: } \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{y} = \frac{z-1}{-1}$$

گزینه ۴

$$9[x^2 - y^2] + F[y^2 + y^2] + 9 = 0 \Rightarrow 9[(x-1)^2 - 1] + F[(y+y)^2 - 9] + 9 = 0$$

$$\Rightarrow 9(x-1)^2 + F(y+y)^2 = y^2 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{\frac{y^2}{9}} + \frac{(y+y)^2}{\frac{y^2}{F}} = 1$$



$$S_{ABCD} = AB \times BC = \frac{yD^2}{a} \times yC = \frac{FD^2}{a} C$$

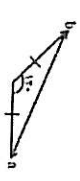
$$a^2 = 9, b^2 = F, a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = F + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{5} \Rightarrow a = y^2, b = y \Rightarrow S = \frac{F \times F \times \sqrt{5}}{y^2} = \frac{16\sqrt{5}}{y^2}$$

گزینه ۴

فرض کنید θ زاویه بین دو بردار a و b باشد داریم:

$$|e_a + e_b| = 1 \Rightarrow |e_a|^2 + |e_b|^2 + 2|e_a||e_b|\cos\theta = 1$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$



اگرچه a و b هم‌اندازه هستند.

پس مثلث شامل بردارهای a و b و $a-b$ متساوی‌الساقین با زاویه رأس 120° درجه است پس زاویه بین a و b برابر 150° درجه است.

با توجه به شکل تحلیلی زیر اول

۷۱، ۱، ۵۵

$$\vec{BC} = \vec{u} = (0, -y, F) \Rightarrow \vec{BC} : \begin{cases} x=0 \\ z=F \\ -y=\frac{F}{F} \end{cases}$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow (-y, F, -y) \cdot (0, -y, F) = 0 \Rightarrow -y^2 + F^2 = 0 \Rightarrow y = \pm F$$

$$\frac{F}{0} + \frac{A}{0} = \frac{B}{0}$$

گزینه ۴

نقطه H را به صورت پارامتری روی BC در نظر می‌گیریم: $H = (0, t, F - t)$

$$\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow (-y, F, -y) \cdot (0, -y, F) = 0 \Rightarrow -y^2 + F^2 = 0 \Rightarrow y = \pm F$$

پس محور z را می‌تواند قطع کند.

گزینه ۲

$$C: \begin{cases} f'_x = 0 \Rightarrow x = y \\ f'_y = 0 \Rightarrow y = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -y \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$C': \begin{cases} f'_x = 0 \Rightarrow x = y \\ f'_y = 0 \Rightarrow y = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -y \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$

یک مماس مشترک دارند $\Rightarrow$ در دایره مماس داخلی اند

$$OO' = \sqrt{(y^2 - y^2) + (-y - y)^2} = 1$$

$$1 = \sqrt{y^2 - m - F} \Rightarrow m = -1$$

گزینه ۴

$$x^2 + y^2 - Fy - \Delta = 0$$

$$F\Delta = F \Rightarrow \Delta = 1 \Rightarrow F(-y, -\frac{y}{F} + 1)$$

$$S(-\frac{1}{F}, \frac{1}{F})$$

گزینه ۱

$$DL \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{u}_L, DL' \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{u}_{L'}$$

$$\vec{u}_L \times \vec{u}_{L'} = (1, y, 1) \times (1, -y, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & y & 1 \\ 1 & -y & 0 \end{vmatrix} = (y, 1, -F)$$

$$\Rightarrow \vec{u}_D = (y, 1, -F) \Rightarrow D: \frac{x-y}{F} = \frac{y}{-F} = \frac{z+1}{-F}$$

نقطه ۱ در معادله این خط صدق می‌کند.

$$(-y, y, \sqrt{F}) \Rightarrow y^2 a + y^2 b + y = -9 + F \sqrt{F}$$

گزینه ۴

زاویه B زاویه بین BA و BC است.

$$\vec{BA} = (-y, -\Delta, -1), \vec{BC} = (1, -y, y)$$

$$\cos B = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{-y + \Delta - y}{\sqrt{y^2 + \Delta^2 + 1} \sqrt{1 + y^2 + y^2}} = 0$$

گزینه ۴

$$y_0 - y_A = F a, b$$

گزینه ۳

$$|a \cdot b| \leq |a| |b| \Rightarrow |y^2 x + y^2 y - z| \leq \sqrt{y^2 x^2 + y^2 y^2 + z^2} \sqrt{y^2 + 1 + 1}$$

گزینه ۳

$$y|a| = y \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow a = -1$$

$$S(y + 1, -1) \Rightarrow S(y^2, -1)$$

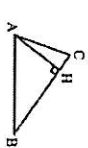
$$F(y, -1)$$

$$|y_1 - y_2| = F \sqrt{F}$$

گزینه ۱

$$\frac{(x-1)^y}{F} - \frac{(y+y)^y}{F} = 1 \Rightarrow a = y, b = F \Rightarrow m = \pm \frac{b}{a} = \pm \frac{F}{y} = \pm y$$

گزینه ۳



ابتدا معادله BC را می‌نویسیم: